Mathematical Journal of Okayama University

Volume 5, *Issue* 1 1955 *Article* 4

OCTOBER 1955

Theorie der 2-Kohomologiegruppen in diskret bewerteten perfekten Körpern

Mikao Moriya*

*Okayama University

THEORIE DER 2-KOHOMOLOGIEGRUPPEN IN DISKRET BEWERTETEN PERFEKTEN KÖRPERN[1]

MIKAO MORIYA

Einleitung.

Anschließend an eine vor kurzem erschienene Arbeit von mir[2] will ich hier die Strukturtheorie der 2-Kohomologiegruppen entwickeln, welche die Hauptordnung eines diskret bewerteten perfekten Körpers als Definitionsbereich besitzen.

Es sei k ein diskret bewerteter perfekter (kommutativer) Körper mit $\mathfrak{o}$ als Hauptordnung und K eine endlich-separable Erweiterung über k, deren Hauptordnung mit $\mathfrak{O}$ bezeichnet wird. Ferner betrachten wir über K eine beliebige endlich-separable Erweiterung $\bar{K}$ mit $\bar{\mathfrak{O}}$ als Hauptordnung. Bekanntlich besitzt dann $\bar{\mathfrak{O}}$ nur ein einziges nicht-triviales Primideal $\bar{\mathfrak{P}}$ (d. h. $\bar{\mathfrak{P}}$ ist das von (0) und $\bar{\mathfrak{O}}$ verschiedene Primideal aus $\bar{\mathfrak{O}}$). Zu einem Restklassenring $\bar{\mathfrak{R}}_m$ von $\bar{\mathfrak{O}}$ nach $\bar{\mathfrak{P}}^m$ ($m \geqq 0$) kann man 2-Kozyklen und 2-Koränder von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_m$ definieren. (Zur Definition siehe § 1. 1) Die Gesamtheit $Z_m^{(2)}$ aller 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_m$ bildet einen Modul mit $\bar{\mathfrak{O}}$ als Multiplikatorenbereich und die Gesamtheit $B_m^{(2)}$ aller 2-Koränder von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_m$ einen $\bar{\mathfrak{O}}$-Untermodul. Der Faktormodul $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{\mathfrak{R}}_m) = Z_m^{(2)}/B_m^{(2)}$ ist die 2-Kohomologiegruppe von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_m$ genannt; jedes Element aus $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ heißt eine 2-Kohomologieklasse von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_m$.

Jede 2-Kohomologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ besitzt stets endliche Kompositionsreihe, welche aus lauter $\bar{\mathfrak{O}}$-Untermoduln besteht; die Länge dieser Kompositionsreihe nenne ich die $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,; \bar{\mathfrak{R}}_m)$. Dabei ist die $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{\mathfrak{R}}_m)$ gleich dem Exponenten $\bar{d}(K/k)$ der Differente von K/k in bezug auf $\bar{\mathfrak{P}}$, wenn m hinreichend groß ist. Ferner besitzt $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ endliche $\bar{\mathfrak{O}}$-Basis, wenn es kein Nullmodul ist; d. h. es gibt endlich viele, von der Nullkohomologieklasse 0 ver-

1) Die Hauptergebnisse der vorliegenden Arbeit habe ich schon mitgeteilt. Vgl. M. Moriya, Theorie der 2-Cohomologiegruppen in diskret bewerteten perfekten Körpern, Proc. Japan Acad., Vol. 30 (1954), S. 787—790.

2) M. Moriya, Zur Fortsetzung der 2-Cozyklen in einem kommutativen Ring, Math, Journ., Okayama Univ., Vol. 4 (1954), S. 1—19. Ich zitiere diese Arbeit mit M II.

schiedene 2-Kohomologieklassen $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \cdots, \bar{C}_r$ derart, daß sich jede 2-Kohomologieklasse aus $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ als Linearform in $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \cdots, \bar{C}_r$ mit Koeffizienten aus $\bar{\mathfrak{O}}$ darstellen läßt, und daß aus der Gleichung $\bar{A}_1\bar{C}_1 + \bar{A}_2\bar{C}_2 + \cdots + \bar{A}_r\bar{C}_r = 0$ $(\bar{A}_i \in \bar{\mathfrak{O}},\ i = 1, 2, \cdots, r)$ stets $\bar{A}_1\bar{C}_1 = \bar{A}_2\bar{C}_2 = \cdots = \bar{A}_r\bar{C}_r = 0$ folgen.

In §1 gebe ich einige Definitionen und einfache Resultate, welche unmittelbar aus diesen Definitionen folgen. In §2 betrachte ich eine Zwischenhauptordnung $\mathfrak{O}^{(1)}$ zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{O}$. Ein 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$, dessen Einschränkung auf $\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{o}$ 2-Korand von $\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ wird, heißt „zerfällt in $\mathfrak{O}^{(1)}$“. Die Gesamtheit $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}^{(1)}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ aller derjenigen 2-Kohomologieklassen aus $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$, die irgendeinen in $\mathfrak{O}^{(1)}$ zerfallenden 2-Kozyklus enthält, bildet einen $\bar{\mathfrak{O}}$-Untermodul von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$. Es zeigt sich dabei, daß für ein hinreichend großes m $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}^{(1)}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ stets zu $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{O}^{(1)}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ $\bar{\mathfrak{O}}$-isomorph ist. Es handelt sich in §3 um die Erweiterung des Multiplikatorenbereiches $\bar{\mathfrak{O}}$ von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ zu einer Oberhauptordnung von $\bar{\mathfrak{O}}$. In §4 bestimme ich die Struktur von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ im Falle, wo $\mathfrak{O}$ aus $\mathfrak{o}$ durch Ringadjunktion eines einzigen Elementes entsteht. Dabei heiße $\mathfrak{O}$ einfach normal über $\mathfrak{o}$. In diesem Fall ist $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ stets zyklischer $\bar{\mathfrak{O}}$-Modul, und die $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ ist gleich $\mathrm{Min}(\bar{d}(K/k), m)$. Eine Hauptordnung $\mathfrak{O}$, welche als ein Turm der einfach normalen Hauptordnungen definiert ist, heißt über $\mathfrak{o}$ normal. In §5 wird die Struktur von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ bestimmt, wenn $\mathfrak{O}$ über $\mathfrak{o}$ normal ist. Im letzten Paragraphen behandle ich den Fall, wo $\mathfrak{O}$ über $\mathfrak{o}$ nicht normal ist. Dazu betrachte ich eine $\bar{K}$ enthaltende, über k galoissche Erweiterung K^*. Dann ist die Hauptordnung $\mathfrak{O}^*$ von K^* normal über $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{O}$. Bezeichnet man nun mit $\mathfrak{P}^*$ das nicht-triviale Primideal aus $\mathfrak{O}^*$ und mit $\mathfrak{R}^*_n$ den Restklassenring von $\mathfrak{O}^*$ nach $\mathfrak{P}^{*n}$, so gilt folgende $\mathfrak{O}^*$-Isomorphierelation:

$$H^{(2)}(\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}^*_n)/H^{(2)}(\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}; \mathfrak{R}^*_n) \cong H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}^*_n).$$

Aus der obigen Relation folgen zunächst, daß die $\mathfrak{O}^*$-Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}^*_n)$ endlich ist, und daß $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}^*_n)$ stets endliche $\mathfrak{O}^*$-Basis besitzt, wenn es kein Nullmodul ist. Ist dabei n durch m teilbar, so ist $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}^*_n)$ gleich der Multiplikatorenbereicherweiterung von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ zu $\mathfrak{O}^*$. Nach der in §3 entwickelten Theorie besitzt dann $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ endliche $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge und sogar endliche $\bar{\mathfrak{O}}$-Basis, wenn es kein Nullmodul ist. Ferner sind für hinreichend große natürliche Zahlen m die 2-Kohomologiegruppen $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ alle einander $\bar{\mathfrak{O}}$-isomorph, und sie haben die gleiche $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge $\bar{d}(K/k)$.

Inhaltsverzeichnis.

Kapitel I. Fundamentaleigenschaften der 2-Kohomologiegruppen.

In diesem Kapitel bezeichnet $\mathfrak{o}$ durchweg die Hauptordnung eines diskret bewerteten perfekten Körpers k und $\mathfrak{O}$ die Hauptordnung einer endlich-separablen Erweiterung K über k. Ferner bezeichnet $\overline{\mathfrak{O}}$ die Hauptordnung einer beliebigen endlich-separablen Erweiterung $\overline{K}$ über K ($\overline{K}$ kann eventuell mit K übereinstimmen) und $\mathfrak{P}$ das nicht-triviale Primideal aus $\overline{\mathfrak{O}}$.

§ 1. Vorbereitungen

1. 2-Kozyklen und 2-Koränder. Für eine nicht-negative ganze rationale Zahl m betrachten wir den Restklassenring $\mathfrak{R}_m$ von $\overline{\mathfrak{O}}$ nach $\mathfrak{P}^m$. Hierbei lassen wir auch $m = \infty$ zu, indem wir unter $\mathfrak{P}^\infty$ das Nullideal aus $\mathfrak{O}$ und infolgedessen unter $\mathfrak{R}_\infty$ die Hauptordnung $\overline{\mathfrak{O}}$ selbst versteht.

Nun sei f eine eindeutige Abbildung des Produktraumes $\mathfrak{O} \times \mathfrak{O}$ in $\overline{\mathfrak{O}}$ mit folgenden Eigenschaften:

1) Für beliebige Elemente X, Y aus $\overline{\mathfrak{O}}$ gilt
$$f(X, Y) \equiv f(Y, X) \mod \mathfrak{P}^m.$$

2) Für beliebige Elemente $X_i, Y_i (i = 1, 2)$ aus $\mathfrak{O}$ gilt
$$f(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) \equiv \sum_{i,j=1}^{2} f(X_i, Y_j) \mod \mathfrak{P}^m.$$

3) Für beliebige Elemente X, Y, Z aus $\mathfrak{O}$ gilt
$$Xf(Y, Z) + f(X, YZ) \equiv f(XY, Z) + Zf(X, Y) \mod \mathfrak{P}^m.$$

4) Für beliebige Eelemente x, y aus $\mathfrak{o}$ gilt
$$f(x, y) \equiv 0 \mod \mathfrak{P}^m.$$

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 5 [1955], Iss. 1, Art. 4

Dabei soll man für mod $\mathfrak{P}^{\infty}$ die Kongruenz durch die Gleichheit ersetzen. Dann heißt f ein 2-*Kozyklus* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$. Zwei 2-Kozyklen f_1 und f_2 von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ heißen einander *gleich*, wenn $f_1 \equiv f_2$ mod $\mathfrak{P}^m$ gilt[1].

Bemerkung. Ist f ein 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$, so kann man für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{O}$ dem $f(X, Y)$ eindeutig die $f(X, Y)$ enthaltende Restklasse $\overline{f}(X, Y)$ aus dem Restklassenring $\mathfrak{R}_m$ zuordnen. Wegen der Eigenschaften 1)—4) wird dann $\overline{f}$ ein 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ im eigentlichen Sinne, es ist aber in unserer Theorie vorteilhafter, daß man nicht $\overline{f}$ sondern f heranzieht.

Eine eindeutige Abbildung g von $\mathfrak{O}$ in $\overline{\mathfrak{O}}$ heißt eine 1-*Kokette* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$, wenn für jedes Element x aus $\mathfrak{o}$ stets $g(x) \equiv 0$ mod $\mathfrak{P}^m$ und für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{O}$ stets $g(X+Y) \equiv g(X) + g(Y)$ mod $\mathfrak{P}^m$ gilt[2]. Aus einer 1-Kokette g von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ kann man stets einen 2-Kozyklus δg von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ bilden, indem man für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{O}$

$$\delta g(X, Y) = Yg(X) + Xg(Y) - g(XY)$$

setzt. Dabei nennt man δg den 2-*Korand* von g.

Sind nun f_1, f_2 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$, so definiert man die Summe $f_1 + f_2$ von f_1 und f_2 durch die Gleichung

$$(f_1 + f_2)(X, Y) = f_1(X, Y) + f_2(X, Y),$$

wo X, Y unabhängig alle Elemente aus $\mathfrak{O}$ durchlaufen. Offenbar ist $f_1 + f_2$ auch ein 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$. Man verifiziert ohne Schwierigkeit, daß die Gesamtheit $Z_m^{(2)}$ aller 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ bei der oben definierten Summenbildung einen $\overline{\mathfrak{O}}$-Modul bildet. Ein 2-Kozyklus f' von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ heißt zu f *kohomolog*, wenn es eine 1-Kokette g von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ gibt, so daß

$$f' \equiv f + \delta g \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^m$$

ist, in Zeichen: $f \sim f'$ $(\mathfrak{P}^m)$. Ist insbesondere

$$f' \equiv \delta g \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^m,$$

so heiße f' zur Null kohomolog: $0 \sim f'$ $(\mathfrak{P}^m)$. Nach Definition gilt offenbar folgende Äquivalenzrelation:

---

1) Dies bedeutet, daß für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{O}$ stets

$$f_1(X, Y) \equiv f_2(X, Y) \text{ mod } \mathfrak{P}^m$$

gilt.

2) g heiße eine lineare Abbildung mod $\mathfrak{P}^m$ von $\mathfrak{O}$ in $\overline{\mathfrak{O}}$.

i) $f \sim f \; (\mathfrak{P}^m)$.
ii) Aus $f \sim f' \; (\mathfrak{P}^m)$ folgt $f' \sim f \; (\mathfrak{P}^m)$.
iii) Sind $f \sim f', f' \sim f'' \; (\mathfrak{P}^m)$, so ist

$$f \sim f'' \; (\mathfrak{P}^m).$$

Wegen der obigen Äquivalenzrelation kann man von einander kohomologen 2-Kozyklen sprechen.

Nun bildet die Gesamtheit $B_m^{(2)}$ aller zur Null kohomologen 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ offenbar einen $\mathfrak{O}$-Untermodul von $Z_m^{(2)}$; der Faktormodul $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m)$ von $Z_m^{(2)}$ nach $B_m^{(2)}$ besitzt $\mathfrak{O}$ als Linksmultiplikatorenbereich, er heiße die *2-Kohomologiegruppe* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$. Jedes Element aus $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m)$ ist eine *2-Kohomologieklasse* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ genannt.

2. Normale 2-Kozyklen und normale 2-Kohomologieklassen. Ein 2-Kozyklus f von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ heißt *normal*, wenn für ein beliebiges Element x bzw. X aus $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{O}$ stets

$$f(x, X) \equiv 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^m$$

gilt. Eine 1-Kokette g von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ heißt *normal*, wenn stets die Kongruenz

$$g(xX) \equiv xg(X) \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^m$$

erfüllt ist, wo x bzw. X alle Elemente aus $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{O}$ durchläuft.

Es sei $W_1 = 1, W_2, \cdots, W_n$ eine Minimalbasis von $\mathfrak{O}$ über $\mathfrak{o}$ und $X = \sum_{i=1}^n x_i W_i$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{O}$, wo die $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ Elemente aus $\mathfrak{o}$ bezeichnen. Dann setze man für einen 2-Kozyklus f von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$:

$$g(x_i W_i) = f(x_i, W_i) \; (i = 1, 2, \cdots, n) \text{ und } \; g(X) = \sum_{i=1}^n g(x_i W_i).$$

Nach Definition ist g sicher eine lineare Abbildung mod $\mathfrak{P}^m$ von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{O}$, und außerdem gilt für ein beliebiges Element x aus $\mathfrak{o}$:

$$g(x) = g(xW_1) = f(x, W_1) = f(x, 1) \equiv 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^m;$$

d. h. g ist eine 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$. Ferner besteht wegen der Relation $xf(x_i, W_i) + f(x, x_i W_i) \equiv f(xx_i, W_i) + W_i f(x, x_i)$ mod $\mathfrak{P}^m$ folgende Kongruenz:

$$\begin{aligned} f(x, x_i W_i) &\equiv -xf(x_i, W_i) + f(xx_i, W_i) \\ &\equiv -xg(x_i W_i) - x_i W_i g(x) + g(xx_i W_i) \\ &\equiv -\delta g(x, x_i W_i) \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^m. \end{aligned}$$

Setzt man also $f_0 = f + \delta g$, so gilt offenbar:

$$\begin{aligned} f_0(x, X) &= f(x, X) + \delta g(x, X) \\ &\equiv \sum_{i=1}^{n} \{ f(x, x_i W_i) + \delta g(x, x_i W_i) \} \equiv 0 \qquad \bmod \mathfrak{P}^m; \end{aligned}$$

d. h. der zu f kohomologe 2-Kozyklus f_0 ist ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ *über* $\overline{\mathfrak{R}}_m$. Mithin ist gezeigt, daß *jede 2-Kohomologieklasse von* $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ *über* $\overline{\mathfrak{R}}_m$ *mindestens einen normalen 2-Kozyklus von* $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ *über* $\overline{\mathfrak{R}}_m$ *enthält.*

Nun sei der 2-Korand einer 1-Kokette g von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ normal. Dann ist

$$\delta g(x, X) \equiv 0 \qquad \bmod \mathfrak{P}^m;$$

wegen $g(x) \equiv 0 \bmod \mathfrak{P}^m$ folgt sofort:

$$\begin{aligned} \delta g(x, X) &= xg(X) + Xg(x) - g(xX) \\ &\equiv xg(X) - g(xX) \equiv 0 \qquad \bmod \mathfrak{P}^m, \end{aligned}$$

also muß g notwendig eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ sein. Somit ist bewiesen:

Ist ein normaler 2-Kozyklus f_0 von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ der 2-Korand einer 1-Kokette g von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$, so ist g normal.

Offenbar bildet die Gesamtheit $Z^{(2)}_{o,m}$ aller normalen 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ einen $\overline{\mathfrak{O}}$-Untermodul von $Z^{(2)}_m$, und ferner stimmt die Gesamtheit $B^{(2)}_{o,m}$ der 2-Koränder aller normalen 1-Koketten von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ mit $Z^{(2)}_{o,m} \cap B^{(2)}_m$ überein. Der Faktormodul $H^{(2)}_o(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ von $Z^{(2)}_{o,m}$ nach $B^{(2)}_{o,m}$ heißt die *normale 2-Kohomologiegruppe* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ und ein Element aus $H^{(2)}_o(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ eine *normale 2-Kohomologieklasse* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$.

Da jede 2-Kohomologieklasse $\bar{C}$ von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ einen normalen 2-Kozyklus f_o von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}^m$ enthält, so ordnen wir $\bar{C}$ die f_o enthaltende, normale 2-Kohomologieklasse $\bar{C}_o(f_o)$ von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ zu. Nach dem oben Bewiesenen ist diese Zuordnung von der Wahl der normalen 2-Kozyklen aus $\bar{C}$ unabhängig, also ist $\bar{C}_o(f_o)$ durch $\bar{C}$ eindeutig bestimmt. Hiernach beweist man ohne Schwierigkeit folgenden

Hilfssatz 1. *Jede 2-Kohomologieklasse $\bar{C}$ aus $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ enthält mindestens einen normalen 2-Kozyklus f_0 von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$. Ordnet man dabei $\bar{C}$ die f_o enthaltende, normale 2-Kohomologieklasse $\bar{C}_o$ zu, so stellt diese Zuordnung einen $\overline{\mathfrak{O}}$-Isomorphismus von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ auf $H^{(2)}_o(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ her.*

3. $\overline{\mathfrak{O}}$-Längen und $\overline{\mathfrak{O}}$-Basen. Eine endliche absteigende Folge von den $\bar{\mathfrak{O}}$-Untermoduln aus $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{\mathfrak{R}}_m)$

$$U_0 = H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{\mathfrak{R}}_m) \supsetneqq U_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq U_s = B_m^{(2)}$$

heißt eine $\bar{\mathfrak{O}}$-Kompositionsreihe von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{\mathfrak{R}}_m)$, wenn die Faktormoduln $U_{i-1}/U_i (i=1,2,\cdots,s)$ einfacher $\bar{\mathfrak{O}}$-Modul sind. Wenn $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{\mathfrak{R}}_m)$ überhaupt eine $\bar{\mathfrak{O}}$-Kompositionsreihe besitzt, so sind die Längen aller $\bar{\mathfrak{O}}$-Kompositionsreihen von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{\mathfrak{R}}_m)$ nach dem Satz von Jordan-Hölder einander gleich; d. h. die Länge irgendeiner $\bar{\mathfrak{O}}$-Kompositionsreihe von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{\mathfrak{R}}_m)$ ist eine Invariante von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{\mathfrak{R}}_m)$, sie heiße im folgenden die $\bar{\mathfrak{O}}$-*Länge* von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{\mathfrak{R}}_m)$. Ebenso kann man die $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge der normalen 2-Kohomologiegruppe $H_0^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{\mathfrak{R}}_m)$ definieren.

Es seien $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \cdots, \bar{C}_r$ 2-Kohomologieklassen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_m$, welche alle von der Nullklasse aus $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{\mathfrak{R}}^m)$ verschieden sind. Dann heißen $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \cdots, \bar{C}_r$ $\bar{\mathfrak{O}}$-*unabhängig*, wenn aus einer beliebigen Gleichnug

$$\bar{A}_1\bar{C}_1 + \bar{A}_2\bar{C}_2 + \cdots + \bar{A}_r\bar{C}_r = 0 \qquad (\text{Nullklasse aus } H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{\mathfrak{R}}_m))$$

stets $\bar{A}_1\bar{C}_1 = \bar{A}_2\bar{C}_2 = \cdots = \bar{A}_r\bar{C}_r = 0$ folgen, wo die $\bar{A}_i (i=1,2,\cdots,r)$ Elemente aus $\bar{\mathfrak{O}}$ bezeichnen. Ein System der $\bar{\mathfrak{O}}$-unabhängigen 2-Kohomologieklassen $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \cdots, \bar{C}_r$ von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_m$ heißt eine $\bar{\mathfrak{O}}$-*Basis*, wenn jede 2-Kohomologieklasse $\bar{C}$ aus $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{\mathfrak{R}}_m)$ von der Form

$$\bar{C} = \sum_{i=1}^{r} \bar{A}_i\bar{C}_i$$

ist, wo die $\bar{A}_i (i=1,2,\cdots,r)$ Elemente aus $\bar{\mathfrak{O}}$ bezeichnen. Ebenso kann man von einer $\bar{\mathfrak{O}}$-Basis von $H_0^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{\mathfrak{R}}_m)$ sprechen.

Nun sei $\{\bar{C}\}$ der durch eine 2-Kohomologieklasse $\bar{C}$ von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_m$ erzeugte $\bar{\mathfrak{O}}$-Untermodul von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{\mathfrak{R}}_m)$. Besitzt dann $\{\bar{C}\}$ eine $\bar{\mathfrak{O}}$-Kompositionsreihe, so heiße die Länge dieser $\bar{\mathfrak{O}}$-Kompositionsreihe die $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge von $\bar{C}$. Ordnet man nun einem beliebigen Element $\bar{X}$ aus $\bar{\mathfrak{O}}$ $\bar{X}\bar{C}$ zu, so ist dadurch $\bar{\mathfrak{O}}$ als Modul auf $\{\bar{C}\}$ $\bar{\mathfrak{O}}$-homomorph abgebildet. Dabei bildet der Kern dieses $\bar{\mathfrak{O}}$-Homomorphismus ein Ideal $\bar{\mathfrak{C}}$ aus $\bar{\mathfrak{O}}$, welches das annullierende Ideal von $\bar{C}$ genannt ist; also ist $\{\bar{C}\}$ $\bar{\mathfrak{O}}$-isomorph zum Restklassenring $\bar{\mathfrak{O}}/\bar{\mathfrak{C}}$. Da $\bar{\mathfrak{C}}$ eine Potenz $\bar{\mathfrak{P}}^l$ von $\bar{\mathfrak{P}}$ ist, so ist die $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge von $\bar{C}$ offenbar gleich dem $\bar{\mathfrak{P}}$-Exponenten l von $\bar{\mathfrak{C}}$.

Es besitze $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{\mathfrak{R}}_m)$ eine endliche $\bar{\mathfrak{O}}$-Basis $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \cdots, \bar{C}_r$ und jedes $\bar{C}_i (1 \leqq i \leqq r)$ sei von der $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge l_i. Dann bestätigt man leicht, daß die Summe $\sum_{i=1}^{r} l_i$ die $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{\mathfrak{R}}_m)$ ist.

§2. Zerfällung der 2-Kohomologieklassen.

In diesem Paragraphen bezeichnet $H_0^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{\mathfrak{R}}_m)$ die normale 2-Kohomologiegruppe, welche schon in §1. 2 definiert ist.

Nun sei $K^{(1)}$ ein Zwischenkörper zwischen K und k; ferner sei $\mathfrak{O}^{(1)}$ die Hauptordnung von $K^{(1)}$. Ein normaler 2-Kozyklus f von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ heißt dann „*zerfällt in* $\mathfrak{O}^{(1)}$“, wenn es eine 1-Kokette $g^{(1)}$ von $\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ gibt, so daß die Einschränkung von f auf $\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{o}$ mod $\mathfrak{P}^m$ gleich $\delta g^{(1)}$ ist. Für beliebige Elemente $x^{(1)}$, $y^{(1)}$ aus $\mathfrak{O}^{(1)}$ gilt also

$$f(x^{(1)}, y^{(1)}) \equiv \delta g^{(1)}(x^{(1)}, y^{(1)}) \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^m.$$

Nun legen wir eine Minimalbasis $W_1 = 1, W_2, \cdots, W_n$ von $\mathfrak{O}$ über $\mathfrak{O}^{(1)}$ fest, und für ein Element $X = \sum_{i=1}^n x_i^{(1)} W_i (x_i^{(1)} \in \mathfrak{O}^{(1)}, i = 1, 2, \cdots, n)$ aus $\mathfrak{O}$ definieren wir eine 1-Kokette g von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ durch die Gleichung

$$g(X) = g^{(1)}(x_1^{(1)}).$$

Ersichtlich ist g eine Fortsetzung von $g^{(1)}$ auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$. Nach Definition ist $g(X)$ offenbar durch die Angabe der Minimalbasis $W_1, W_2, \cdots, W_n$ und durch X eindeutig bestimmt. Bildet man nun den 2-Kozyklus

$$f' = f - \delta g,$$

so gilt für beliebige Elemente $x^{(1)}$, $y^{(1)}$ aus $\mathfrak{O}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} f'(x^{(1)}, y^{(1)}) &= f(x^{(1)}, y^{(1)}) - \delta g(x^{(1)}, y^{(1)}) \\ &= f(x^{(1)}, y^{(1)}) - \delta g^{(1)}(x^{(1)}, y^{(1)}) \equiv 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^m. \end{aligned}$$

Ferner definieren wir eine 1-Kokette g' von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ durch folgende Vorschrift:

$$g'(x_i^{(1)} W_i) = f'(x_i^{(1)}, W_i), \qquad g'(X) = \sum_{i=1}^n g'(x_i^{(1)} W_i),$$

wo wieder $X = \sum_{i=1}^n x_i^{(1)} W_i \ (x_i^{(1)} \in \mathfrak{O}^{(1)}, \ i = 1, 2, \cdots, n)$ gesetzt ist. Wie in §1. 2 kann man leicht verifizieren, daß für ein beliebiges Element $x^{(1)}$ aus $\mathfrak{O}^{(1)}$ stets

$$(f' + \delta g')(x^{(1)}, X) \equiv 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^m$$

gilt; d. h. $f' + \delta g' = f - \delta(g - g')$ ist ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}^{(1)}$ über $\mathfrak{R}_m$. Es ist klar, daß alle 2-Kozyklen aus einer normalen 2-Kohomologieklasse von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{P}_m$ in $\mathfrak{O}^{(1)}$ zerfallen, wenn diese 2-Kohomologieklasse irgendeinen in $\mathfrak{O}^{(1)}$ zerfallenden, normalen 2-Kozyklus enthält. Wir können also von einer in $\mathfrak{O}^{(1)}$ zerfallenden, normalen 2-Kohomologieklasse von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ sprechen. Aus dem oben Bewiesenen schließt man also folgenden

Hilfssatz 2. *Jede in $\mathfrak{O}^{(1)}$ zerfallende, normale 2-Kohomologieklasse von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ enthält sicher einen normalen 2-Kozyklus von*

$\mathfrak{O}/\mathfrak{O}^{(1)}$ *über* $\mathfrak{R}_m$.

Nun sei f ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}^{(1)}$ über $\mathfrak{R}_m$ und g eine 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ mit $f \equiv \delta g$ mod $\mathfrak{P}^m$. Dann gilt für beliebige Elemente $x^{(1)}$, $y^{(1)}$ aus $\mathfrak{O}^{(1)}$:

$$y^{(1)}g(x^{(1)}) + x^{(1)}g(y^{(1)}) - g(x^{(1)}y^{(1)}) = \delta g(x^{(1)}, y^{(1)})$$
$$\equiv f(x^{(1)}, y^{(1)}) \equiv 0 \quad \text{mod } \mathfrak{P}^m;$$

d. h. $g(x^{(1)}y^{(1)}) \equiv y^{(1)}g(x^{(1)}) + x^{(1)}g(y^{(1)})$ mod $\mathfrak{P}^m$. Dies bedeutet aber, daß g eine *Derivation* $D^{(1)}$ von $\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ ist[1]. Wenn dabei der Exponent m hinreichend groß ist, so existiert eine Derivation D von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$, welche eine Fortsetzung von $D^{(1)}$ auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ ist[2]; es gilt also für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{O}$:

$$\delta D(X, Y) \equiv YD(X) + XD(Y) - D(XY) \equiv 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^m.$$

Also ist $f \equiv \delta(g-D)$ mod $\mathfrak{P}^m$. Da aber für beliebige Element $x^{(1)}$ aus $\mathfrak{O}^{(1)}$ stets

$$g(x^{(1)}) = D^{(1)}(x^{(1)}) = D(x^{(1)})$$

gilt, so ist $g-D$ eine 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}^{(1)}$ über $\mathfrak{R}^m$. Nach dem in §1. 2 Gezeigten ist $g-D$ eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}^{(1)}$ über $\mathfrak{R}_m$. Somit ist gezeigt:

Hilfssatz 3. *Für jedes hinreichend große m wird ein normaler 2-Kozyklus f von $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}^{(1)}$ über $\mathfrak{R}_m$ dann und nur dann der 2-Korand einer normalen 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}^{(1)}$ über $\mathfrak{R}_m$, wenn f der 2-Korand einer 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ ist.*

Bemerkung 1. Hilfssatz 3 gilt auch für $m = \infty$. Ist nämlich für eine 1-Kokette g von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^\infty = \mathfrak{R}_\infty$ $f = \delta g$ ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}^{(1)}$ über $\mathfrak{R}_\infty$, so gelten für ein beliebiges Element $x^{(1)}$ aus $\mathfrak{O}^{(1)}$:

$$g(x^{(1)\nu}) = \nu x^{(1)\nu-1}g(x^{(1)}) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots).$$

Ist also $\varphi(\Xi)$ das Minimalpolynom von $x^{(1)}$ in $\mathfrak{o}$, so gilt:

$$g(\varphi(x^{(1)})) = \varphi'(x^{(1)})g(x^{(1)}) = 0,$$

wo $\varphi'(\Xi)$ die Ableitung von $\varphi(\Xi)$ nach Ξ bezeichnet. Da $K^{(1)}$ über k

1) M II, S. 18.

2) Man soll etwa m so groß nehmen, daß m größer ist als der $\mathfrak{P}$-Exponent der *Quasidifferente* von K/k. Vgl. M. Moriya, Theorie der Derivationen und Körperdifferenten, Math. Journ., Okayama Univ., Vol. 2 (1953), S. 135, Satz 6. Diese Arbeit ist mit M I zitiert.

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 5 [1955], Iss. 1, Art. 4

separabel ist, so ist $\varphi'(x^{(1)})$ sicher von Null verschieden; es muß also $g(x^{(1)}) = 0$ sein. Hieraus schließt man sofort, daß g eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}^{(1)}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_\infty$ ist.

Wir bezeichnen nun mit $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}^{(1)}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ die Gesamtheit aller in $\mathfrak{O}^{(1)}$ zerfallenden, normalen 2-Kohomologieklassen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$. Offenbar bildet $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}^{(1)}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ einen $\overline{\mathfrak{O}}$-Untermodul von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$, welche ich im folgenden die in $\mathfrak{O}^{(1)}$ *zerfallende Untergruppe* von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ nennen will. Nach Hilfssatz 2 enthält jede 2-Kohomologieklasse $\bar{C}$ aus $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}^{(1)}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ mindestens einen normalen 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}^{(1)}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$. Wenn außerdem m hinreichend groß ist, so gehören nach Hilfssatz 3 alle normalen 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}^{(1)}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ aus $\bar{C}$ zu ein und derselben normalen 2-Kohomologieklasse von $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}^{(1)}$ über $\mathfrak{R}_m$. Wenn man also aus einer beliebigen 2-Kohomologieklasse $\bar{C}$ aus $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}^{(1)}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ einen normalen 2-Kozyklus f von $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}^{(1)}$ *über* $\overline{\mathfrak{R}}_m$ herausgreift und dann $\bar{C}$ die f enthaltende 2-Kohomologieklasse aus $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{O}^{(1)}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ zuordnet, so entsteht dadurch ein $\overline{\mathfrak{O}}$-Isomorphismus von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}^{(1)}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ *auf* $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{O}^{(1)}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$, falls m hinreichend groß ist. Daher ist folgender Satz bewiesen:

Satz 1. *Es existiert eine natürliche Zahl N von der Art, daß für jedes m (einschließlich $m = \infty$) mit $m \geqq N$ die in $\mathfrak{O}^{(1)}$ zerfallende Untergruppe $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}^{(1)}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ stets auf $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{O}^{(1)}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ $\overline{\mathfrak{O}}$-isomorph abgebildet wird.*

Bemerkung 2. Durch geringe Modifikationen kann man Satz 1 auch für die 2-Kohomologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ beweisen.

§ 3. Erweiterung des Multiplikatorenbereiches einer 2-Kohomologiegruppe.

Wir betrachten über $\overline{K}$ eine endlich-separable Erweiterung K^* mit $\mathfrak{O}^*$ als Hauptordnung und bezeichnen mit $\mathfrak{P}^*$ das nicht-triviale Primideal aus $\mathfrak{O}^*$. Ferner sei $W_1^* = 1, W_2^*, \cdots, W_n^*$ eine Minimalbasis von $\mathfrak{O}^*$ über $\overline{\mathfrak{O}}$ und e die Verzweigungsordnung von K^* über $\overline{K}$. Für ein Vielfaches m von e betrachten wir dann einen 2-Kozyklus f^* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m^*$, wo $\mathfrak{R}_m^*$ den Restklassenring von $\mathfrak{O}^*$ nach $\mathfrak{P}^{*m}$ bezeichnet. Dabei versteht man unter $m = \infty$ auch ein Vielfaches von e. Da für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{O}$ der Wert $f^*(X, Y)$ stets zu $\mathfrak{O}^*$ gehört, so kann man

$$f^*(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \bar{A}_i(X, Y) W_i^* \tag{3.1}$$

setzen, wo die $\bar{A}_i(X, Y)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ die durch X, Y eindeutig bestimmten Elemente aus $\bar{\mathfrak{O}}$ sind. Für beliebige Elemente X, Y, Z aus $\mathfrak{O}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} &Xf^*(Y, Z) + f^*(X, YZ) - f^*(XY, Z) - Zf^*(X, Y) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\{X\bar{A}_i(Y, Z) + \bar{A}_i(X, YZ) - \bar{A}_i(XY, Z) - Z\bar{A}_i(X, Y)\} W_i^* \\ &\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^{*m}. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man hierbei, daß $W_1^*, W_2^*, \cdots, W_n^*$ eine Minimalbasis von $\mathfrak{O}^*$ über $\mathfrak{O}$ ist, so schließt man ohne weiteres:

$$X\bar{A}_i(Y, Z) + \bar{A}_i(X, YZ) \equiv \bar{A}_i(XY, Z) + Z\bar{A}_i(X, Y) \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^{m_0},$$

wo $m_0 = m/e$ gesetzt ist. Bezeichnet man nun den Restklassenring von $\bar{\mathfrak{O}}$ nach $\mathfrak{P}^{m_0}$ mit $\bar{\mathfrak{R}}_{m_0}$, so verifiziert man ohne Schwierigkeit, daß die Koeffizienten $\bar{A}_i(X, Y)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_{m_0}$ definieren, wenn X, Y unabhängig alle Elemente aus $\mathfrak{O}$ durchlaufen. Wenn man also die durch $\bar{A}_i(X, Y)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ definierten 2-Kozyklen bzw. mit den $\bar{A}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ bezeichnet, so erhält man:

(3. 2) $$f^* = \sum_{i=1}^{n} W_i^* \bar{A}_i.$$

Dies besagt aber, daß der $\mathfrak{O}^*$-Modul $Z_m^{*(2)}$ aller 2-Kozyklen $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m^*$ aus dem $\bar{\mathfrak{O}}$-Modul $\bar{Z}_{m_0}^{(2)}$ aller 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_{m_0}$ durch Erweiterung des Multiplikatorenbereiches $\bar{\mathfrak{O}}$ zu $\mathfrak{O}^*$ entsteht. Man nennt also $Z_m^{*(2)}$ die *Multiplikatorenbereicherweiterung* von $\bar{Z}_{m_0}$ zu $\mathfrak{O}^*$.

Ist insbesondere f^* normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m^*$, so sind die 2-Kozyklen $\bar{A}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ auch normal. Also ist der $\mathfrak{O}^*$-Modul $Z^{*(2)}_{0,m}$ aller normalen 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m^*$ die Multiplikatorenbereicherweiterung von $\bar{Z}^{(2)}_{0,m_0}$ zu $\mathfrak{O}^*$, wo $\bar{Z}^{(2)}_{0,m_0}$ den $\bar{\mathfrak{O}}$-Modul aller normalen 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_{m_0}$ bezeichnet.

Nun sei in (3. 2) f^* der 2-Korand einer 1-Kokette g^* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m^*$. Dann gilt für ein beliebiges Element X aus $\mathfrak{O}$:

(3. 3) $$g^*(X) = \sum_{i=1}^{n} \bar{B}_i(X) W_i^* \qquad \bar{B}_i(X) \in \mathfrak{O} (i = 1, 2, \cdots, n),$$

wo die Koeffizienten $\bar{B}_i(X)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ durch X eindeutig bestimmt sind. Wenn X alle Elemente aus $\mathfrak{O}$ durchläuft, so definieren die $\bar{B}_i(X)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ bzw. die 1-Koketten $\bar{B}_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_{m_0}$. Da nach Voraussetzung

$$f^* \equiv \delta g^* \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^{*m}$$

ist, so erhält man aus (3. 1):

$$f^*(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \bar{A}_i(X, Y)\, W_i^*$$
$$\equiv \sum_{i=1}^{n} \{ Y\bar{B}_i(X) + X\bar{B}_i(Y) - \bar{B}_i(XY)\}\, W_i^* \qquad \bmod \mathfrak{P}^{*m};$$

hieraus folgen sofort die Kongruenzen:

$$\bar{A}_i(X, Y) \equiv \delta\bar{B}_i(X, Y) \qquad \bmod \bar{\mathfrak{N}}^{m_0} \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Also gilt nach (3. 1):

$$f^* = \sum_{i=1}^{n} W_i^* \delta\bar{B}_i \qquad \bmod \mathfrak{P}^{*m}. \tag{3.4}$$

Ferner ist $g^* = \sum_{i=1}^{n} W_i^* \bar{B}_i$.

Der $\mathfrak{O}^*$-Modul $B_m^{*(2)}$ der 2-Koränder aller 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{N}_m^*$ ist also gleich der Multiplikatorenbereicherweiterung des $\bar{\mathfrak{O}}$-Moduls $\bar{B}_{m_0}^{(2)}$ zu $\mathfrak{O}^*$, wo $\bar{B}_{m_0}^{(2)}$ die Gesamtheit der 2-Koränder aller 1-Koketten von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{N}}_{m_0}$ bezeichnet. Ebenso sieht man sofort ein, daß der $\mathfrak{O}^*$-Modul $B^{*(2)}_{0,m}$ der 2-Koränder aller normalen 1-Koketten von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{N}_m^*$ die Multiplikatorenbereicherweiterung von $\bar{B}_{0,m_0}^{(2)}$ zu $\mathfrak{O}^*$ ist, wo $\bar{B}_{0,m_0}^{(2)}$ die Gesamtheit der 2-Koränder aller normalen 1-Koketten von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{N}}_{m_0}$ bezeichnet.

Nun seien $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \cdots, \bar{C}_r$ beliebig endlich viele 2-Kohomologieklassen aus $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{N}}_{m_0}) = \bar{Z}_{m_0}^{(2)}/\bar{B}_{m_0}^{(2)}$. Dann greifen wir aus jedem $\bar{C}_i$ $(1 \leqq i \leqq r)$ irgendeinen 2-Kozyklus $\bar{f}_i$ heraus. Für ein beliebiges Elementsystem $A_1^*, A_2^*, \cdots, A_r^*$ aus $\mathfrak{O}^*$ gehört $\sum_{i=1}^{r} A_i^* \bar{f}_i$ irgendeiner 2-Kohomologieklasse C^* aus $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{N}_m^*)$ an. Dabei ist C^* durch die $\bar{C}_i$ und A_i^* $(i = 1, 2, \cdots, r)$ eindeutig bestimmt, aber unabhängig von der Wahl der 2-Kozyklen $\bar{f}_i$ aus den $\bar{C}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$. Wir wollen daher einfach

$$C^* = \sum_{i=1}^{r} A_i^* \bar{C}_i$$

setzen und C^* die durch die A_i^* und $\bar{C}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ erzeugte 2-Kohomologieklasse von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{N}_m^*$ nennen. Offenbar bildet die Gesamtheit aller durch die Elemente aus $\mathfrak{O}^*$ und durch die 2-Kohomologieklassen aus $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{N}}_{m_0})$ erzeugten 2-Kohomologieklassen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{N}_m^*$ einen $\mathfrak{O}^*$-Untermodul von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{N}_m^*)$; dieser $\mathfrak{O}^*$-Untermodul heiße die *Multiplikatorenbereicherweiterung* von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{N}}_{m_0})$ zu $\mathfrak{O}^*$. Mit Rücksicht von (3. 2) und (3. 4) überzeugt man sich leicht, daß $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{N}_m^*)$ mit der Multiplikatorenbereicherweiterung von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{N}}_{m_0})$ zu $\mathfrak{O}^*$ übereinstimmt. Ebenso kann man auch bestätigen, daß die normale 2-Kohomologiegruppe $H_0^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{N}_m^*)$ mit der Multiplikatorenbereicherweiterung der normalen 2-Kohomologiegruppe $H_0^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{N}}_{m_0})$ zu $\mathfrak{O}^*$ übereinstimmt.

Hilfssatz 4. *Die 2-Kohomologiegruppe* $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{N}_m^*)$ *bzw. die* *normale 2-Kohomologiegruppe* $H_0^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m^*)$ *ist die Multiplikatorenbereicherweiterung der 2-Kohomolologiegruppe* $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\overline{\mathfrak{R}}_{m_0})$ *bzw. der normalen 2-Kohomologiegruppe* $H_0^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\overline{\mathfrak{R}}_{m_0})$ *von* $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ *über* $\overline{\mathfrak{R}}_{m_0}$. *Dabei ist* $m=m_0e$ *gesetzt.*

Nun setzen wir voraus, daß die 2-Kohomologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m^*)$ eine endliche $\mathfrak{O}^*$-Basis $C_1^*, C_2^*, \cdots, C_r^*$ besitzt, wo wieder $m_0e=m$ gesetzt ist, und wir greifen aus jedem C_i^* $(1\leqq i\leqq r)$ einen 2-Kozyklus f_i^* heraus. Nach (3. 2) existieren dann endlich viele 2-Kozyklen $\bar f_{i,1}, \bar f_{i,2}, \cdots, \bar f_{i,n}$ von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_{m_0}$, für welche die Gleichung

$$f_i^*=\sum_{\nu=1}^n W_\nu^*\bar f_{i,\nu}$$

gilt. Ist nun $\bar f$ ein 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_{m_0}$, so ist die $\bar f$ enthaltende 2-Kohomologieklasse $C^*(\bar f)$ von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m^*$ sicher von der Form:

$$C^*(\bar f)=\sum_{i=1}^r A_i^*C_i^*, \tag{3. 5}$$

wo die A_i^* $(i=1, 2, \cdots, r)$ Elemente aus $\mathfrak{O}^*$ bezeichnen. Setzt man dabei

$$A_i^*=\sum_{\nu=1}^n \bar B_{i\nu}W_\nu^* \qquad (\bar B_{i\nu}\in\overline{\mathfrak{O}},\ i=1, 2, \cdots, r),$$

so folgt aus (3. 5):

$$\bar f-\sum_{i=1}^r\Big(\sum_{\nu=1}^n\bar B_{i\nu}W_\nu^*\Big)f_i^*\sim 0 \qquad (\mathfrak{P}^{*m});$$

d. h. es gilt:

$$\bar f-\sum_{i=1}^r\Big(\sum_{\nu=1}^n\bar B_{\nu i}W_\nu^*\Big)\Big(\sum_{\mu=1}^n W_\mu^*\bar f_{i,\mu}\Big)\sim 0 \qquad (\mathfrak{P}^{*m}).$$

Setzt man dabei $W_\mu^*W_\nu^*=\sum_{\tau=1}^n\bar C_{\mu\nu\tau}W_\tau^*$, so erhält man ohne weiteres:

$$\bar f-\sum_{i=1}^r\sum_{\mu,\nu=1}^n\bar B_{i\nu}\bar C_{\mu\nu 1}\bar f_{i,\mu}\sim 0 \qquad (\overline{\mathfrak{P}}^{m_0}),$$

weil $\bar f$ ein 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_{m_0}$ und $W_1^*=1$ ist. Wenn man also mit $\bar C(\bar f_{i,\nu})$ die $\bar f_{i,\nu}$ enthaltende 2-Kohomologieklasse von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_{m_0}$ bezeichnet, so ist die $\bar f$ enthaltende 2-Kohomologieklasse $\bar C(\bar f)$ von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_{m_0}$ von der Form:

$$\bar C(\bar f)=\sum_{i=1}^r\sum_{\nu=1}^n\bar A_{i\nu}\bar C(\bar f_{i,\nu}) \qquad (\bar A_{i\nu}\in\overline{\mathfrak{O}});$$

d. h. die 2-Kohomologieklassen $\bar C(\bar f_{i,\nu})$ $(i=1, 2, \cdots, r;\ \nu=1, 2, \cdots, n)$ sind ein Erzeugendsystem von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\overline{\mathfrak{R}}_{m_0})$. Da $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m^*)$ kein Nullmodul und die Multiplikatorenbereicherweiterung von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\overline{\mathfrak{R}}_{m_0})$ zu $\mathfrak{O}^*$ ist, so ist $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\overline{\mathfrak{R}}_{m_0})$ auch kein Nullmodul. Also besitzt $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\overline{\mathfrak{R}}_{m_0})$ eine endliche $\overline{\mathfrak{O}}$-Basis $\bar C_1, \bar C_2, \cdots, \bar C_s$, weil $\overline{\mathfrak{O}}$ euklidischer

Ring ist[1]. Es ist klar, das die $\bar{C}_i$ $(i=1, 2, \cdots, s)$ ein Erzeugendsystem von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}^*_m)$ bilden.

Nun bestehe für Elemente $A_1^*, A_2^*, \cdots, A_s^*$ aus $\mathfrak{O}^*$ die Gleichung

$$A_1^*\bar{C}_1 + A_2^*\bar{C}_2 + \cdots + A_s^*\bar{C}_s = 0 \tag{3.6}$$

in $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}^*_m)$. Greift man dann aus jedem $\bar{C}_i$ $(1 \leqq i \leqq s)$ einen beliebigen 2-Kozyklus $\bar{f}_i$ heraus, so gilt nach (3.6)

$$\sum_{\nu=1}^{n} W_\nu^*(\sum_{i=1}^{s} \bar{A}_{i\nu}\bar{f}_i) \sim 0 \qquad (\mathfrak{P}^{*m}),$$

wo $A_i^* = \sum_{\nu=1}^{n} \bar{A}_{i\nu} W_\nu^*$ $(i=1, 2, \cdots, s; \bar{A}_{i\nu} \in \bar{\mathfrak{O}})$ gesetzt sind. Hieraus schließt man ohne weiteres, daß für jedes ν mit $1 \leqq \nu \leqq n$

$$\sum_{i=1}^{s} \bar{A}_{i\nu}\bar{f}_i \sim 0 \qquad (\bar{\mathfrak{P}}^{m_0});$$

d. h. es gilt in $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_{m_0})$ die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{s} \bar{A}_{i\nu}\bar{C}_i = 0.$$

Da aber $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \cdots, \bar{C}_s$ eine $\bar{\mathfrak{O}}$-Basis von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_{m_0})$ bilden, so müssen $\bar{A}_{i\nu}\bar{C}_i = 0$ $(i=1, 2, \cdots, s;\ \nu = 1, 2, \cdots, n)$ sein; d. h. aus der Gleichung (3.6) ergeben sich

$$A_1^*\bar{C}_1 = A_2^*\bar{C}_2 = \cdots = A_s^*\bar{C}_s = 0.$$

Daher bilden $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \cdots, \bar{C}_s$ auch eine $\mathfrak{O}^*$-Basis von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}^*_m)$. Den bisher durchgeführten Beweis kann man auch auf die normalen 2-Kohomologiegruppen $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}^*_m)$ und $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_{m_0})$ anwenden. Somit ist bewiesen:

Satz 2. *Wenn die (normale) 2-Kohomologiegruppe* $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}^*_m)$ $(H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}^*_m))$ *endliche* $\mathfrak{O}^*$*-Basis besitzt, so besitzt* $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_{m_0})$ $(H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_{m_0}))$ *auch endliche* $\bar{\mathfrak{O}}$*-Basis. Ferner bildet eine endliche* $\bar{\mathfrak{O}}$*-Basis von* $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_{m_0})$ $(H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_{m_0}))$ *stets eine* $\mathfrak{O}^*$*-Basis von* $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}^*_m)$ $(H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}^*_m))$.

Bemerkung. Es sei $\bar{C}$ eine 2-Kohomologieklasse aus $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_{m_0})$ mit $\bar{l}$ als $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge. Gilt dann für ein Element A^* aus $\mathfrak{O}^*$ die Gleichung

$$A^*\bar{C} = 0$$

in $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}^*_m)$, so besteht für einen beliebigen 2-Kozyklus $\bar{f}$ von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_{m_0}$ aus $\bar{C}$:

$$A^*\bar{f} \sim 0 \qquad (\mathfrak{P}^{*m}).$$

---

1) Vgl. etwa Van der Waerden, Moderne Algebra, II. Teil, Berlin (1940), § 109, S. 112—117.

Setzt man dabei $A^* = \sum_{i=1}^{n} \bar{A}_i W_i^*$, so erhält man aus der obigen Kohomologierelation :

$$\bar{A}_1 \bar{f} \sim \bar{A}_2 \bar{f} \sim \cdots \sim \bar{A}_n \bar{f} \sim 0 \qquad (\mathfrak{P}^{m_0}).$$

Bezeichnet also $\bar{\mathfrak{C}}$ das annullierende Ideal von $\bar{C}$ aus $\bar{\mathfrak{O}}$, so sind

$$\bar{A}_i \in \bar{\mathfrak{C}} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n);$$

hieraus folgt sofort: $A^* \in \mathfrak{C}\mathfrak{O}^*$. Dies besagt aber, daß das annullierende Ideal von $\bar{C}$ aus $\mathfrak{O}^*$ eine Teilmenge von $\mathfrak{C}\mathfrak{O}^*$ ist. Da das Ideal $\mathfrak{C}\mathfrak{O}^*$ offenbar $\bar{C}$ annulliert, so ist $\mathfrak{C}\mathfrak{O}^*$ mit dem annullierenden Ideal von $\bar{C}$ identisch, wenn man $\bar{C}$ als 2-Kohomologieklasse aus $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m^*)$ auffaßt. Also ist die $\mathfrak{O}^*$-Länge von $\bar{C}$ gleich $\bar{l}e$.

Kapitel II. Struktur der 2-Kohomologiegruppen in diskret bewerteten perfekten Körpern.

Es sei k wieder ein diskret bewerteter perfekter Körper mit $\mathfrak{o}$ als Hauptordnung ; ferner sei $k = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_s = K$ eine Körperfolge, in der jedes K_i $(1 \leqq i \leqq s)$ über k endlich-separabel ist. Wir bezeichnen dann mit $\mathfrak{O}_i$ die Hauptordnung von K_i ; insbesondere sind $\mathfrak{O}_0 = \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{O}_s = \mathfrak{O}$ gesetzt. Dabei heißt die Folge der Hauptordnungen

$$\mathfrak{O}_0 \subset \mathfrak{O}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{O}_s$$

normal, wenn für jedes i $(1 \leqq i \leqq s)$ $\mathfrak{O}_i$ aus $\mathfrak{O}_{i-1}$ durch Ringadjunktion eines Elementes θ_i entsteht—$\mathfrak{O}_i = \mathfrak{O}_{i-1}[\theta_i]$—. Ist nun $\varphi_{i-1}(\Xi)$ das Minimalpolynom von θ_i in K_{i-1}, so gehören die Koeffizienten von $\varphi_{i-1}(\Xi)$ alle zu $\mathfrak{O}_{i-1}$, weil θ_i in bezug auf $\mathfrak{O}_{i-1}$ ganz ist; der Grad n_i von $\varphi_{i-1}(\Xi)$ in bezug auf Ξ ist offenbar der Rang von $\mathfrak{O}_i$ über $\mathfrak{O}_{i-1}$, und das Elementsystem 1, $\theta_i, \cdots, \theta_i^{n_i-1}$ bildet eine Minimalbasis von $\mathfrak{O}_i$ über $\mathfrak{O}_{i-1}$. Weil K_i über k separabel ist, so ist $\varphi_{i-1}(\Xi)$ ein separables Polynom aus $\mathfrak{O}_{i-1}[\Xi]$. Wenn man also die Ableitung von $\varphi_{i-1}(\Xi)$ nach Ξ mit $\varphi'_{i-1}(\Xi)$ bezeichnet, so ist das Hauptideal $(\varphi'_{i-1}(\theta_i))$ aus $\mathfrak{O}_i$ gleich der *Differente* von K_i über K_{i-1}[1].

Die Hauptordnung $\mathfrak{O}$ einer endlich-separablen Erweiterung K über k heiße *normal über* $\mathfrak{o}$, wenn es eine normale Folge der Hauptordnungen mit $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{O}$ als dem Anfangs- bzw. Endglied gibt. Wenn insbesondere $\mathfrak{O} = \mathfrak{o}[\theta]$ ist, so heiße $\mathfrak{O}$ *einfach normal über* $\mathfrak{o}$.

Wie im Kap. I bezeichnen wir in diesem Kapitel mit $\mathfrak{P}$ durchweg das

1) Vgl. etwa E. Artin, Algebraic numbers and algebraic functions (1950), S. 92.

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 5 [1955], Iss. 1, Art. 4

nicht-triviale Primideal aus dem Oberring $\bar{\mathfrak{O}}$[1] von $\mathfrak{O}$, welcher die Hauptordnung einer endlich-separablen Erweiterung $\bar{K}$ über K bildet. In diesem Kapitel wollen wir die Struktur der 2-Kohomologiegruppen $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^m)$ und $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^m)$ bestimmen.

§ 4. Struktur der 2-Kohomologiegruppen mit einfach normaler Hauptordnung als Definitionsbereich.

$\mathfrak{O}$ sei eine einfach normale Hauptordnung über $\mathfrak{o}$ und θ ein primitives Element von $\mathfrak{O}$ über $\mathfrak{o}$: $\mathfrak{O} = \mathfrak{o}[\theta]$. Ferner sei $\varphi(\Xi)$ das Minimalpolynom von θ in $\mathfrak{o}$ und n der Rang von $\mathfrak{O}$ über $\mathfrak{o}$. Dann betrachten wir die 2-Kohomologiegruppen $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\ \bar{\mathfrak{R}}_m)$ und $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\ \bar{\mathfrak{R}}_m)$, wo $\bar{\mathfrak{R}}_m$ den Restklassenring von $\bar{\mathfrak{O}}$ nach $\mathfrak{P}^m$ bezeichnet. Wie ich schon anderswo bewiesen habe, enthält jede 2-Kohomologieklasse von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_m$ sicher einen θ-normierten 2-Kozyklus f über $\mathfrak{o}$; d. h. f besitzt folgende Eigenschaft[2]:

Für ein beliebiges Element x aus $\mathfrak{o}$ gelten

i) $f(x, \theta^i) \equiv 0 \mod \mathfrak{P}_m$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$

und

ii) $f(x\theta, \theta^i) \equiv 0 \quad \mod \mathfrak{P}^m \quad (i = 0, 1, \cdots, n-2)$.

Man verifiziert nach i) leicht, daß f über $\mathfrak{o}$ normal ist. Ferner ist f durch den Wert $f(\theta, \theta^{n-1}) \mod \mathfrak{P}^m$ eindeutig bestimmt[3].

Nun sei außerdem vorausgestzt, daß der obige θ-normierte 2-Kozyklus f zur Null kohomolog ist. Dann existiert nach dem in § 1. 2 Gezeigten eine normale 1-Kokette g von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_m$ mit $f \equiv \delta g \mod \mathfrak{P}^m$; es folgen also aus ii) ohne weiteres :

$$g(x\theta^i) \equiv ix\theta^{i-1}g(\theta) \qquad \mod \mathfrak{P}^m \ (x \in \mathfrak{o},\ i = 1, 2, \cdots, n-1).$$

Setzt man dabei $f(\theta, \theta^{n-1}) = \mu$, so gilt offenbar folgende Kongruenz :

$$\varphi'(\theta)g(\theta) \equiv \delta g(\theta, \theta^{n-1}) \equiv f(\theta, \theta^{n-1}) = \mu \qquad \mod \mathfrak{P}^m,$$

wo $\varphi'(\Xi)$ die Ableitung von $\varphi(\Xi)$ nach Ξ bezeichnet.

Umgekehrt sei für ein Element μ aus $\bar{\mathfrak{O}}$ die Kongruenz

$$\varphi'(\theta)\Xi \equiv \mu \qquad \mod \mathfrak{P}^m$$

in $\bar{\mathfrak{O}}$ lösbar. Ist dann λ eine Lösung der obigen Kongruenz aus $\bar{\mathfrak{O}}$, so setze man für ein beliebiges Element $\sum_{i=0}^{n-1}x_i\theta^i$ $(x_i \in \mathfrak{o},\ i = 0, 1, \cdots, n-1)$:

$$g(\textstyle\sum_{i=0}^{n-1}x_i\theta^i) = \sum_{i=1}^{n-1}ix_i\theta^{i-1}\lambda.$$

---

1) $\bar{\mathfrak{O}}$ kann eventuell mit $\mathfrak{O}$ übereinstimmen.

2), 3) Vgl. M II, Satz 3.

Dann definiert g offenbar eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ mit $g(\theta)=\lambda$. Wegen der Gleichung $\varphi(\theta)=0$ beweist man ohne Schwierigkeit, daß δg ein θ-normierter 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ mit $g(\theta, \theta^{n-1})\equiv\mu$ mod $\mathfrak{P}^m$ ist. Somit ist bewiesen:

Hilfssatz 5. *Ein θ-normierter 2-Kozyklus f von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ ist dann und nur dann mod $\mathfrak{P}^m$ zur Null kohomolog, wenn die Kongruenz*

$$\varphi'(\theta)\Xi\equiv f(\theta, \theta^{n-1}) \qquad \bmod \mathfrak{P}^m$$

in $\bar{\mathfrak{O}}$ lösbar ist. Ist ferner λ eine Lösung der obigen Kongruenz aus $\bar{\mathfrak{O}}$, so existiert eine normale 1-Kokette g von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ mit $g(\theta)=\lambda$, so daß

$$f\equiv\delta g \qquad \bmod \mathfrak{P}^m$$

ist.

Es ist bereits bewiesen worden, daß es einen θ-normierten 2-Kozyklus f_0 von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ mit $f_0(\theta, \theta^{n-1})=1$ gibt[1]. Dann läßt sich ein beliebiger θ-normierter 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ mod $\mathfrak{P}^m$ als das Produkt aus f_0 und einem geeigneten Element aus $\bar{\mathfrak{O}}$ darstellen. Da jede 2-Kohomologieklasse aus $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m)$ mindestens einen θ-normierten 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ enthält, so ist $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m)$ sicher ein zyklischer $\bar{\mathfrak{O}}$-Modul, welcher die f_0 enthaltende 2-Kohomologieklasse $\bar{C}_0$ als eine erzeugende Klasse besitzt. Dabei bestätigt man leicht, daß das annullierende Ideal von $\bar{C}_0$ nach Hilfssatz 5 gleich $(\mathfrak{P}^m, (\varphi'(\theta)))$ ist. Es gilt also folgende $\bar{\mathfrak{O}}$-Isomorphierelation:

$$\bar{\mathfrak{O}}/(\mathfrak{P}^m, (\varphi'(\theta)))\cong H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m).$$

Bezeichnet nun u den $\mathfrak{P}$-Exponenten von $(\mathfrak{P}^m, (\varphi'(\theta)))$, so ist die $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge von $\bar{\mathfrak{O}}/(\mathfrak{P}^m, (\varphi'(\theta)))$, also auch von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m)$ gleich u. Somit ist bewiesen:

Satz 3. *$\mathfrak{O}$ sei die Hauptordnung einer endlich-separablen Erweiterung K über k. Ferner sei $\mathfrak{O}$ einfach normal über $\mathfrak{o}$. Dann ist die 2-Kohomologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m)$ bzw. die normale 2-Kohomologiegruppe $H_0^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m)$ von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ ein zyklischer $\bar{\mathfrak{O}}$-Modul. Ferner ist die $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m)$ bzw. $H_0^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m)$ gleich dem $\mathfrak{P}$-Exponenten von $(\mathfrak{P}^m, (\varphi'(\theta)))$. Ist insbesondere $\mathfrak{P}^m$ durch $(\varphi'(\theta))$ teilbar, so ist $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m)$ bzw. $H_0^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m)$ ein zyklischer $\bar{\mathfrak{O}}$-Modul mit dem $\mathfrak{P}$-Exponenten der Differente von K/k als $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge.*

Wir betrachten nun einen Spezialfall, daß $\bar{\mathfrak{O}}$ mit $\mathfrak{O}$ übereinstimmt:

1) Vgl. M II, Satz 3

Bezeichnet man dann mit $\mathfrak{P}$ das nicht-triviale Primideal aus $\mathfrak{O}$, so gilt folgender

Zusatz zu Satz 3. *$H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^m)$ bzw. $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^m)$ ist zyklischer $\mathfrak{O}$-Modul. Ist dabei $\mathfrak{P}^m$ durch $(\varphi'(\theta))$ teilbar, so ist die $\mathfrak{O}$-Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^m)$ bzw. $H_0^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^m)$ stets gleich dem $\mathfrak{P}$-Exponenten der Differente von K/k*[1].

§ 5. Struktur der 2-Kohomologiegruppen mit nomaler Hauptordnung als Definitionsbereich.

In diesem Paragraphen sei die Hauptordnung $\mathfrak{O}$ einer endlich-separablen Erweiterung über k durchweg *normal* über $\mathfrak{o}$, und $\mathfrak{o}=\mathfrak{O}_0\subset\mathfrak{O}_1\subset\cdots\subset\mathfrak{O}_s=\mathfrak{O}$ sei eine normale Folge der Hauptordnungen, wo $\mathfrak{O}_i=\mathfrak{O}_{i-1}[\theta_i]\,(i=1,2,\cdots,s)$ gesetzt sind. Ferner bezeichne $\bar{\mathfrak{R}}_m$ den Restklassenring von $\bar{\mathfrak{O}}$ nach $\bar{\mathfrak{P}}^m$. Zu einem beliebigen 2-Kozyklus $f^{(i-1)}$ von $\mathfrak{O}_{i-1}/\mathfrak{o}$ $(i\geqq 1)$ über $\bar{\mathfrak{R}}_m$ existiert dann ein über $\mathfrak{O}_{i-1}$ θ_i-normierter 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}_i/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_m$, welcher eine Fortsetzung von $f^{(i-1)}$ auf $\mathfrak{O}_i/\mathfrak{o}$ ist[2]. Mit Hilfe der vollständigen Induktion beweist man ohne Schwierigkeit die Existenz einer Fortsetzung f von $f^{(i-1)}$ auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ mit folgender Eigenschaft:

Für jedes j mit $i\leqq j\leqq s$ gelten

i) $f(x^{(j-1)},\theta_j^\nu)\equiv 0 \quad \bmod \bar{\mathfrak{P}}^m \ (\nu=0,1,\cdots,n_j-1)$

und

ii) $f(x^{(j-1)}\theta_j,\theta_j^\nu)\equiv 0 \quad \bmod \bar{\mathfrak{P}}^m \ (\nu=0,1,\cdots n_j-2)$[3],

wo $x^{(j-1)}$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{O}_{j-1}$ und n_j den Rang von $\mathfrak{O}_j$ über $\mathfrak{O}_{j-1}$ bezeichnet. Wie in §4 bemerkt ist, gibt es einen über $\mathfrak{O}_{i-1}$ θ_i-normierten 2-Kozyklus $h_{i,i-1}$ von $\mathfrak{O}_i/\mathfrak{O}_{i-1}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_m$ mit $h_{i,i-1}(\theta_i,\theta_i^{n_i-1})=1$. Daher existiert eine Fortsetzung h_{i-1} von $h_{i,i-1}$ auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_{i-1}$ mit folgender Eigenschaft:

Für jedes j mit $i\leqq j\leqq s$ gelten

i) $h_{i-1}(x^{(j-1)},\theta_j^\nu)\equiv 0 \quad \bmod \mathfrak{P}^m \ (\nu=0,1,\cdots,n_j-1)$,

ii) $h_{i-1}(x^{(j-1)}\theta_j,\theta_j^\nu)\equiv 0 \quad \bmod \mathfrak{P}^m \ (\nu=0,1,\cdots,n_j-2)$

und

iii) $h_{i-1}(\theta_i,\theta_i^{n_i-1})=1,\ h_{i-1}(\theta_j,\theta_j^{n_j-1})=0 \quad (j>i)$.

Dabei bezeichnet $x^{(j-1)}$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{O}_{j-1}$ und n_j den Rang von $\mathfrak{O}_j$ über $\mathfrak{O}_{j-1}$.

---

1) Y. Kawada, On the derivations in number fields, Ann. Math., Vol. 54 (1952), S. 310—314.

2) M II, Satz 3.

3) Für jedes j mit $s\geqq j\geqq i$ kann man dem $f(\theta_j,\theta_j^{n_j-1})$ einen beliebigen Wert aus $\bar{\mathfrak{O}}$ angeben.

Ein 2-Kozyklus f von $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_{i-1}$ über $\mathfrak{R}_m$, welcher die folgende Eigenschaft (5. 1) besitzt, heiße *ausgezeichnet über* $\mathfrak{O}_{i-1}$:

$$\text{(5. 1)}\quad \begin{aligned} &f(x^{(j-1)}, \theta_j^\nu) \equiv 0 \quad \bmod \mathfrak{P}^m \quad (\nu = 0, 1, \cdots, n_j - 1),\\ &f(x^{(j-1)}\theta_j, \theta_j^\nu) \equiv 0 \quad \bmod \mathfrak{P}^m \quad (\nu = 0, 1, \cdots, n_j - 2), \end{aligned}$$

wo $i \leqq j \leqq s$, $x^{(j-1)} \in \mathfrak{O}_{j-1}$ und n_j der Rang von $\mathfrak{O}_j$ über $\mathfrak{O}_{j-1}$ ist.

Nach dem oben Gezeigten ist bewiesen:

Hilfssatz 6. *Es existiert zu jedem Index i mit $1 \leqq i \leqq s$ ein über $\mathfrak{O}_{i-1}$ ausgezeichneter 2-Kozyklus h_{i-1} von $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_{i-1}$ über $\mathfrak{R}_m$ mit $h_{i-1}(\theta_i, \theta_i^{n_i-1}) = 1$ und $h_{i-1}(\theta_j, \theta_j^{n_j-1}) = 0$ $(i < j \leqq s)$. Dabei bezeichnet n_q den Rang von $\mathfrak{O}_q$ über $\mathfrak{O}_{q-1}$ $(i \leqq q \leqq s)$.*

Ferner gilt folgender

Hilfssatz 7. *Ist ein 2-Kozyklus f von $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_{i-1}$ $(1 \leqq i \leqq s)$ über $\mathfrak{R}_m$ ausgezeichnet über $\mathfrak{O}_{i-1}$, so ist f normal über $\mathfrak{O}_{i-1}$; d. h. für ein beliebiges Element $x^{(i-1)}$ bzw. X aus $\mathfrak{O}_{i-1}$ bzw. $\mathfrak{O}$ gilt stets:*

$$f(x^{(i-1)}, X) \equiv 0 \quad \bmod \mathfrak{P}^m.$$

Beweis. Es ist klar, daß die Elemente

$$\theta_i^{\nu_i}\theta_{i+1}^{\nu_{i+1}}\cdots\theta_s^{\nu_s} \qquad (\nu_j = 0, 1, \cdots, n_j - 1;\ j = i, i+1, \cdots, s)$$

eine Minimalbasis von $\mathfrak{O}$ über $\mathfrak{O}_{i-1}$ bilden, wo für jedes j n_j den Rang von $\mathfrak{O}_j$ über $\mathfrak{O}_{j-1}$ bezeichnet. Dann ist ein Element X aus $\mathfrak{O}$ von der Form

$$X = \sum c(\nu_i, \nu_{i+1}, \cdots, \nu_s)\theta_i^{\nu_i}\theta_{i+1}^{\nu_{i+1}}\cdots\theta_s^{\nu_s}$$

mit den Koeffizienten $c(\nu_i, \nu_{i+1}, \cdots, \nu_s)$ aus $\mathfrak{O}_{i-1}$. Um also die Kongruenz $f(x^{(i-1)}, X) \equiv 0 \bmod \mathfrak{P}^m$ zu beweisen, genügt zu zeigen, daß für jedes Zahlensystem $(\nu_i, \nu_{i+1}, \cdots, \nu_s)$ stets

$$f(x^{(i-1)}, c(\nu_i, \nu_{i+1}, \cdots, \nu_s)\theta_i^{\nu_i}\theta_{i+1}^{\nu_{i+1}}\cdots\theta_s^{\nu_s}) \equiv 0 \quad \bmod \mathfrak{P}^m$$

erfüllt ist.

Weil die Einschränkung von f auf $\mathfrak{O}_i/\mathfrak{O}_{i-1}$ über $\mathfrak{O}_{i-1}$ θ_i-normiert ist, so ist die Einschränkung von f auf $\mathfrak{O}_i/\mathfrak{O}_{i-1}$ ein *normaler* 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}_i/\mathfrak{O}_{i-1}$ über $\mathfrak{R}_m$. Wir nehmen also an, daß die Einschränkung von f auf $\mathfrak{O}_{s-1}/\mathfrak{O}_{i-1}$ ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}_{s-1}/\mathfrak{O}_{i-1}$ über $\mathfrak{R}_m$ ist; also gilt für ein beliebiges Element $x^{(i-1)}$ bzw. $x^{(s-1)}$ aus $\mathfrak{O}_{i-1}$ bzw. $\mathfrak{O}_{s-1}$ stets:

$$f(x^{(i-1)}, x^{(s-1)}) \equiv 0 \quad \bmod \mathfrak{P}^m.$$

Da das Element $c(\nu_i, \nu_{i+1}, \cdots, \nu_s)\,\theta_i^{\nu_i}\theta_{i+1}^{\nu_{i+1}}\cdots\theta_{s-1}^{\nu_{s-1}}$ ersichtlich zu $\mathfrak{O}_{s-1}$ gehört,

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 5 [1955], Iss. 1, Art. 4

so bezeichnen wir der Einfachheit halber dieses Element mit $x^{(s-1)}$. Dann gilt offenbar:

$$x^{(t-1)}f(x^{(s-1)}, \theta_s^{\nu_s}) + f(x^{(t-1)}, c(\nu_t, \nu_{t+1}, \cdots, \nu_s)\theta_t^{\nu_t}\theta_{t+1}^{\nu_{t+1}}\cdots\theta_s^{\nu_s})$$
$$\equiv f(x^{(t-1)}x^{(s-1)}, \theta_s^{\nu_s}) + \theta_s^{\nu_s}f(x^{(t-1)}, x^{(s-1)}) \qquad \mathrm{mod}\ \overline{\mathfrak{P}}^{m}.$$

Da f über $\mathfrak{O}_{s-1}$ θ_s-normiert ist, so sind

$$f(x^{(s-1)}, \theta_s^{\nu_s}) \equiv 0 \quad \text{und} \quad f(x^{(t-1)}x^{(s-1)}, \theta_s^{\nu_s}) \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ \overline{\mathfrak{P}}^{m};$$

ferner gilt nach Annahme:

$$f(x^{(t-1)}, x^{(s-1)}) \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ \overline{\mathfrak{P}}^{m}.$$

Daher muß $f(x^{(t-1)}, c(\nu_t, \nu_{t+1}, \cdots, \nu_s)\theta_t^{\nu_t}\theta_{t+1}^{\nu_{t+1}}\cdots\theta_s^{\nu_s}) \equiv 0 \ \mathrm{mod}\ \overline{\mathfrak{P}}^{m}$ sein, w. z. b. w.

Wir betrachten fortdauernd die Minimalbasis

$$\theta_t^{\nu_t}\theta_{t+1}^{\nu_{t+1}}\cdots\theta_s^{\nu_s} \qquad (\nu_j = 0, 1, \cdots, n_j - 1;\ j = i, i+1, \cdots, s)$$

von $\mathfrak{O}$ über $\mathfrak{O}_{t-1}$. Dann bezeichnen wir unter den Basiselementen dieser Minimalbasis die $\theta_t^{\nu_t}$ $(\nu_t = 0, 1, \cdots, n_t - 1)$ bzw. mit $\Omega_{\nu_t+1}^{(t)}$ und die übrigen Elemente, irgenwie numeriert, mit $\Omega_{n_t+1}^{(t)}, \cdots, \Omega_{N_t}^{(t)}$, wo $N_t = n_t n_{t+1} \cdots n_s$ gesetzt ist. Ein beliebiges Element X aus $\mathfrak{O}$ ist also von der Form:

$$X = \sum_{\nu=1}^{N_t} x_\nu^{(t-1)}\Omega_\nu^{(t)} \qquad x_\nu^{(t-1)} \in \mathfrak{O}_{t-1}\ (\nu = 1, 2, \cdots, N_t).$$

Nun definiere man für einen beliebigen normalen 2-Kozyklus f von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{N}}_m$ eine eindeutige Abbildung g von $\mathfrak{O}$ in $\overline{\mathfrak{O}}$ auf folgende Weise:

$$g(X) = \sum_{\nu=1}^{N_t} g(x_\nu^{(t-1)}\Omega_\nu^{(t)}) \quad \text{und} \quad g(x_\nu^{(t-1)}\Omega_\nu^{(t)}) = f(x_\nu^{(t-1)}, \Omega_\nu^{(t)}).$$

Dann sieht man sofort ein, daß g eine lineare Abbildung mod $\overline{\mathfrak{P}}^{m}$ von $\mathfrak{O}$ in $\overline{\mathfrak{O}}$ ist. Da f ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{N}}_m$ ist, so folgt für ein beliebiges Element x aus $\mathfrak{o}$ aus der Relation

$$\sum_{\nu=1}^{N_t}\{xf(x_\nu^{(t-1)}, \Omega_\nu^{(t)}) + f(x, x_\nu^{(t-1)}\Omega_\nu^{(t)})\} \equiv \sum_{\nu=1}^{N_t}\{f(xx_\nu^{(t-1)}, \Omega_\nu^{(t)})$$
$$+ \Omega_\nu^{(t)}f(x, x_\nu^{(t-1)})\} \qquad \mathrm{mod}\ \overline{\mathfrak{P}}^{m}:$$
$$xg(X) = x\sum_{\nu=1}^{N_t} f(x_\nu^{(t-1)}, \Omega_\nu^{(t)}) \equiv \sum_{\nu=1}^{N_t} f(xx_\nu^{(t-1)}, \Omega_\nu^{(t)})$$
$$\equiv g(xX) \qquad \mathrm{mod}\ \overline{\mathfrak{P}}^{m},$$

d. h. g ist eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{N}}_m$. Ferner ist g wegen $g(x^{(t-1)}) = g(x^{(t-1)}\Omega_1^{(t)}) = f(x^{(t-1)}, 1) \equiv 0 \ \mathrm{mod}\ \overline{\mathfrak{P}}^{m}$ $(x^{(t-1)} \in \mathfrak{O}_{t-1})$ eine 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_{t-1}$ über $\overline{\mathfrak{N}}_m$; daher induziert der 2-Korand δg von g in $\mathfrak{O}_{t-1}$ offenbar einen ausgezeichneten 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}_{t-1}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{N}}_m$.

Wir setzen nun

$$f' = f + \delta g.$$

Dann gelten für ein beliebiges Element $x^{(i-1)}$ aus $\mathfrak{O}_{i-1}$:

$$\begin{aligned} f'(x^{(i-1)}, \Omega_\nu^{(i)}) &= f(x^{(i-1)}, \Omega_\nu^{(i)}) + \delta g(x^{(i-1)}, \Omega_\nu^{(i)}) \\ &= f(x^{(i-1)}, \Omega_\nu^{(i)}) + \Omega_\nu^{(i)} g(x^{(i-1)}) + x^{(i-1)} g(\Omega_\nu^{(i)}) - g(x^{(i-1)}\Omega_\nu^{(i)}) \\ &\equiv f(x^{(i-1)}, \Omega_\nu^{(i)}) - f(x^{(i-1)}, \Omega_\nu^{(i)}) \equiv 0 \mod \overline{\mathfrak{P}}^m \\ & \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, N_i), \end{aligned}$$

weil $g(x^{(i-1)}) \equiv 0$ und $g(\Omega_\nu^{(i)}) = f(1, \Omega_\nu^{(i)}) \equiv 0 \mod \overline{\mathfrak{P}}^m$ sind. Hier soll bemerkt werden, daß die Einschränkung von f' auf $\mathfrak{O}_{i-1}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{o}$ ausgezeichnet ist, soweit die Einschränkung von f von $\mathfrak{O}_{i-1}/\mathfrak{o}$ auch so ist.

Nun sei vorausgesetzt, daß für ein q mit $1 \leqq q < n_i - 1$ die Kongruenzen

$$f'(x^{(i-1)}\theta_i, \theta_i^j) \equiv 0 \mod \overline{\mathfrak{P}}^m \ (j = 0, 1, \cdots, q-1)$$

erfüllt sind, wo $x^{(i-1)}$ alle Elemente aus $\mathfrak{O}_{i-1}$ durchläuft. Dann definiere man eine 1-Kokette g' von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ durch folgende Festsetzungen:

i) $g'(x^{(i-1)}\Omega_1^{(i)}) = g'(x^{(i-1)}) \equiv 0 \mod \overline{\mathfrak{P}}^m$.

ii) Für jedes ν mit $2 \leqq \nu \leqq n_i$ ist
$g'(x^{(i-1)}\Omega_\nu^{(i)}) = g'(x^{(i-1)}\theta_i^{\nu-1}) = f'(x^{(i-1)}\theta_i, \theta_i^{\nu-2})$.

iii) Für jedes ν mit $n_i + 1 \leqq \nu \leqq N_i$ ist
$g'(x^{(i-1)}\Omega_\nu^{(i)}) = f'(x^{(i-1)}, \Omega_\nu^{(i)})$.

Nach Definition gelten offenbar für alle ν mit $\nu > n_i$ stets:

$$g'(x^{(i-1)}\Omega_\nu^{(i)}) \equiv 0 \mod \overline{\mathfrak{P}}^m;$$

für jedes ν mit $2 \leqq \nu < n_i$ erhält man aus der Relation

$$x^{(i-1)} f'(\theta_i, \theta_i^{\nu-2}) + f'(x^{(i-1)}, \theta_i^{\nu-1}) \equiv f'(x^{(i-1)}\theta_i, \theta_i^{\nu-2}) + \theta_i^{\nu-2} f'(x^{(i-1)}, \theta_i) \mod \overline{\mathfrak{P}}^m:$$

$$x^{(i-1)} g'(\Omega_\nu^{(i)}) \equiv g'(x^{(i-1)}\Omega_\nu^{(i)}) \mod \overline{\mathfrak{P}}^m.$$

Ferner verifiziert man wie bei g, daß g' auch eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ und sogar eine 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_{i-1}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ ist.

Setzt man nun

$$f'' = f' + \delta g',$$

so verifiziert man für jedes ν mit $1 \leqq \nu \leqq N_i$ ohne Schwierigkeit folgende Kongruenz:

$$\begin{aligned} f''(x^{(i-1)}, \Omega_\nu^{(i)}) &= f'(x^{(i-1)}, \Omega_\nu^{(i)}) + \delta g'(x^{(i-1)}, \Omega_\nu^{(i)}) \\ &\equiv f'(x^{(i-1)}, \Omega_\nu^{(i)}) + x^{(i-1)} g'(\Omega_\nu^{(i)}) - g'(x^{(i-1)}\Omega_\nu^{(i)}) \\ &\equiv 0 \qquad \mod \mathfrak{P}^m. \end{aligned}$$

Aus der Relation $f''(x^{(i-1)}\theta_i, \theta_i^j) = f'(x^{(i-1)}\theta_i, \theta_i^j) + \delta g'(x^{(i-1)}\theta_i, \theta_i^j) = f'(x^{(i-1)}\theta_i, \theta_i^j) + \theta_i^j f'(x^{(i-1)}\theta_i, 1) + x^{(i-1)}\theta_i f'(\theta_i, \theta_i^{j-1}) - f'(x^{(i-1)}\theta_i, \theta_i^j) \equiv x^{(i-1)}\theta_i f'(\theta_i, \theta_i^{j-1}) \mod \mathfrak{P}^m$ schließt man sofort, daß für alle j zwischen 0 und q stets

$$f''(x^{(i-1)}\theta_i, \theta_i^j) \equiv 0 \qquad \mod \mathfrak{P}^m$$

gelten. Ferner ist klar, daß die Einschränkung von f'' auf $\mathfrak{O}_{i-1}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{o}$ ausgezeichnet ist, soweit f' auch so ist. Man kann daher durch vollständige Induktion einen zu f kohomologen, normalen 2-Kozyklus f^* so konstruieren, daß die Einschränkung von f^* auf $\mathfrak{O}_i/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{O}_{i-1}$ θ_i-normiert ist und infolgedessen diese Einschränkung von f^* auf $\mathfrak{O}_i/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{o}$ ausgezeichnet ist, soweit die Einschränkung von f auf $\mathfrak{O}_{i-1}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{o}$ ausgezeichnet ist.

Nach dem eben Bewiesenen existiert zunächst ein normaler 2-Kozyklus f_1 von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ mit $f_1 \sim f\ (\mathfrak{P}^m)$ von der Art, daß die Einschränkung von f_1 auf $\mathfrak{O}_1/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{o}$ θ_1-normiert ist. Nun existiert nach dem oben Bewiesenenen ein normaler 2-Kozyklus f_2 von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ mit $f_2 \sim f_1\ (\mathfrak{P}^m)$ von der Art, daß die Einschränkung von f_2 auf $\mathfrak{O}_2/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{o}$ ausgezeichnet ist. Mit Hilfe der vollständigen Induktion kann man also folgenden Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz 8. *Jede normale 2-Kohomologieklasse von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ enthält mindestens einen über $\mathfrak{o}$ ausgezeichneten 2-Kozyklus.*

Hilfssatz 9. *Es seien h_{i-1} $(i=1, 2, \cdots, s)$ ausgezeichnete 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$, welche in Hilfssatz 6 angegeben sind. Ferner sei f ein beliebiger, über $\mathfrak{o}$ ausgezeichneter 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ mit $f(\theta_i, \theta_i^{r_i-1}) = \mu_i$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$. Dann gilt:*

$$f \equiv \textstyle\sum_{i=1}^{s} \mu_i h_{i-1} \qquad \mod \mathfrak{P}^m.$$

Die normale 2-Kohomologiegruppe $H_0^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\ \overline{\mathfrak{R}}_m)$ besitzt also endlich viele Erzeugende.

Beweis. Wenn $s=1$, also $\mathfrak{O}$ über $\mathfrak{o}$ einfach normal ist, so ist sicher:

$$f \equiv \mu_1 h_0 \qquad \mod \mathfrak{P}^m\ ^{1)}.$$

1) Vgl. M II, Satz 3.

Ist nun $f^{(1)}$ ein über $\mathfrak{O}_1$ ausgezeichneter 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_1$ über $\mathfrak{R}_m$ mit den $f^{(1)}(\theta_i, \theta_i^{\nu_i-1}) = \mu_i$ $(i = 2, 3, \cdots, s)$ so nehmen wir an, daß

$$f^{(1)} \equiv \sum_{i=2}^{s} \mu_i h_{i-1} \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^m$$

ist. Nun ist $f - \mu_1 h_0$ ein über $\mathfrak{o}$ ausgezeichneter 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$, dessen Einschränkung auf $\mathfrak{O}_1/\mathfrak{o}$ mod $\mathfrak{P}^m$ zu 0 kongruent ist; d. h. $f - \mu_1 h_0$ ist ein über $\mathfrak{O}_1$ ausgezeichneter 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_1$ über $\mathfrak{R}_m$ mit $(f - \mu_1 h_0)(\theta_i, \theta_i^{\nu_i-1}) = \mu_i$ $(i = 2, 3, \cdots, s)$. Nach Annahme gilt also:

$$f - \mu_1 h_0 \equiv \sum_{i=2}^{s} \mu_i h_{i-1} \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^m,$$

woraus

$$f \equiv \sum_{i=1}^{s} \mu_i h_{i-1} \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^m$$

folgt.

Es sei $\bar{C}$ eine 2-Kohomologieklasse aus $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m)$. Dann besitzt $\bar{C}$ einen über $\mathfrak{o}$ ausgezeichneten 2-Kozyklus f. Da nach dem oben Bewiesenen

$$f \equiv \sum_{i=1}^{s} \mu_i h_{i-1} \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^m \qquad (\mu_i \in \bar{\mathfrak{O}},\ i = 1, 2, \cdots, s)$$

gilt, so erhält man:

$$\bar{C} = \sum_{i=1}^{s} \mu_i \bar{C}(h_{i-1}),$$

wo $\bar{C}(h_{i-1})$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$ die h_{i-1} enthaltenden 2-Kohomologieklassen aus $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m)$ bezeichnen. Daher bilden $\bar{C}(h_0), \bar{C}(h_1), \cdots, \bar{C}(h_{s-1})$ ein Erzeugendsystem von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m)$.

Wir bezeichnen nun mit $K_j (1 \leqq j \leqq s)$ den Quotientenkörper von $\mathfrak{O}_j$. Da das Hauptideal $(\varphi'_{j-1}(\theta_j))$ aus $\mathfrak{O}$ gleich ist der Differente von K_j/K_{j-1}, so ist das Ideal $\mathfrak{D}_{i-1} = (\prod_{j=i}^{s} \varphi'_{j-1}(\theta_j))$ $(1 \leqq i \leqq s)$ nach dem Schachtelungssatz über Differenten gleich der Differente von K/K_{i-1}[1]. Dann gilt folgender

Hilfssatz 10. *f_{i-1} sei ein über $\mathfrak{O}_{i-1}$ ausgezeichneter 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_{i-1}$ über $\mathfrak{R}_m$ und $\mathfrak{D}_{i-1} = (\prod_{j=i}^{s} \varphi'_{j-1}(\theta_j))$ die Differente von K/K_{i-1}. Dann gilt:*

---

1) Vgl. etwa H. Hasse, Zahlentheorie, Berlin (1950), S. 316.

$$\left[\prod_{j=i}^{s} \varphi'_{j-1}(\theta_j)\right] f_{i-1} \sim 0 \qquad (\mathfrak{P}^m);$$

folglich annulliert die Differente von K/K_{i-1} jede normale 2-Kohomologieklasse aus $H_n^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_{i-1}; \mathfrak{R}_m)$

Beweis. Ist $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_i$, so gilt nach Hilfssatz 5:

$$\varphi'_{i-1}(\theta_i) f_{i-1} \sim 0 \qquad (\mathfrak{P}^m).$$

Wir wollen also annehmen, daß für jeden über $\mathfrak{O}_i$ ausgezeichneten 2-Kozyklus f_i von $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_i$ über $\mathfrak{R}_m$ stets

$$\left[\prod_{j=j+1}^{s} \varphi'_{j-1}(\theta_j)\right] f_i \sim 0 \qquad (\mathfrak{P}^m)$$

gilt. Offenbar besitzt die Kongruenz

$$\varphi'_{i-1}(\theta_i)\Xi \equiv \varphi'_{i-1}(\theta_i) f_{i-1}(\theta_i, \theta_i^{n_i-1}) \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^m$$

$\Xi = f_{i-1}(\theta_i, \theta_i^{n_i-1})$ als eine Lösung. Also existiert nach Hilfssatz 5 eine normale 1-Kokette $g_{i,i-1}$ von $\mathfrak{O}_i/\mathfrak{O}_{i-1}$ über $\mathfrak{R}_m$ von der Art, daß für die Einschränkung $f_{i,i-1}$ von f_{i-1} auf $\mathfrak{O}_i/\mathfrak{O}_{i-1}$ $\varphi'_{i-1}(\theta_i) f_{i,i-1} \equiv \delta g_{i,i-1}$ mod $\mathfrak{P}^m$ gilt. Nun sei $g_{j,i-1}$ ($j \geqq i$) eine solche Fortsetzung von $g_{i,i-1}$ auf $\mathfrak{O}_j/\mathfrak{O}_{i-1}$, daß $\delta g_{j,i-1}$ über $\mathfrak{o}$ ausgezeichnet ist. Ist dann $\varphi_j(\Xi) = \Xi^{n_{j+1}} + \sum_{\nu=1}^{n_{j+1}-1} c_\nu^{(j)} \Xi^\nu$ das Minimalpolynom von θ_{j+1} in $\mathfrak{O}_j$, so setze man:

$$\varphi_j^{(j,i-1)}(\theta_{j+1}) = \sum_{\nu=1}^{n_{j+1}-1} \theta_{j+1}^{\nu} g_{j,i-1}(c_\nu^{(j)}).$$

Da $\Xi = 0$ eine Lösung der Kongruenz

$$\varphi'_j(\theta_{j+1})\Xi + \varphi_j^{(j,i-1)}(\theta_{j+1}) \equiv \varphi_j^{(j,i-1)}(\theta_{j+1}) \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^m$$

ist, so existiert eine normale 1-Kokette $g_{j+1,i-1}$ von $\mathfrak{O}_{j+1}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ derart, daß $g_{j+1,i-1}$ eine Fortsetzung von $g_{j,i-1}$ auf $\mathfrak{O}_{i+1}/\mathfrak{o}$ mit $g_{j+1,i-1}(\theta_{j+1}) = 0$ und $\delta g_{j+1,i-1}$ über $\mathfrak{O}_j$ θ_{i+1}-normiert ist[1]. Durch vollständige Induktion beweist man die Existenz einer solchen Fortsetzung g_{i-1} von $g_{i,i-1}$ auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_{i-1}$, daß $g_{i-1}(\theta_j) \equiv 0$ mod $\mathfrak{P}^m$ ($i < j \leqq s$) sind und δg_{i-1} über $\mathfrak{O}_{i-1}$ ausgezeichnet ist. Offenbar ist $f_i = \varphi'_{i-1}(\theta_i) f_{i-1} - \delta g_{i-1}$ ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_i$ über $\mathfrak{R}_m$ und sogar nach Konstruktion über $\mathfrak{O}_i$ ausgezeichnet. Nach Induktionsannahme gilt also:

$$\left[\prod_{j=i+1}^{s} \varphi'_{j-1}(\theta_j)\right] f_i = \left[\prod_{j=i}^{s} \varphi'_{j-1}(\theta_j)\right] f_{i-1} - \left[\prod_{j=i+1}^{s} \varphi'_{j-1}(\theta_j)\right] \delta g_{i-1} \sim 0 \ (\mathfrak{P}^m);$$

1) Vgl. M II, Satz 4.

d. h. es ist $\left[\prod_{j=i}^{s} \varphi'_{j-1}(\theta_j)\right] f_{i-1} \sim 0 \qquad (\mathfrak{P}^m).$

Da jede 2-Kohomologieklasse $\bar{C}$ aus $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_{i-1}\,;\,\mathfrak{N}_m)$ nach Hilfssatz 8 einen über $\mathfrak{O}_{i-1}$ ausgezeichneten 2-Kozyklus enthält, so gilt nach dem eben Bewiesenen stets:

$$\left[\prod_{j=i}^{s} \varphi'_{j-1}(\theta_j)\right] \bar{C} \doteq 0\,;$$

also ist die Klasse $\bar{C}$ durch die Differente $\mathfrak{D}_{i-1}$ von K/K_{i-1} annulliert, weil $\mathfrak{D}_{i-1}$ das durch $\prod_{j=1}^{s} \varphi'_{j-1}(\theta_j)$ erzeugte Hauptideal ist.

Zusatz 1 zu Hilfssatz 10. *Die Differente $\mathfrak{D}(K/k)$ von K/k annulliert jede 2-Kohomologieklasse aus $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{N}_m)$ bzw. $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{N}_m)$.*

Aus dem Beweis von Hilfssatz 10 erhält man folgenden

Zusatz 2 zu Hilfssatz 10. *Zu einer normalen 1-Kokette $g_{i,i-1}$ von $\mathfrak{O}_i/\mathfrak{O}_{i-1}$ über $\mathfrak{N}_m$ existiert stets eine Fortsetzung g_{i-1} von $g_{i,i-1}$ auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_{i-1}$ derart, daß $g_{i-1}(\theta_j) \equiv 0 \bmod \mathfrak{P}^m$ $(j = i+1, \cdots, s)$ sind und δg_{i-1} über $\mathfrak{O}_{i-1}$ ausgezeichnet ist.*

Nun nehmen wir an, daß $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{N}_m)$ kein Nullmodul ist. Da $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{N}_m)$ nach Hilfssatz 9 endlich viele Erzeugende besitzt, so besitzt $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{N}_m)$ eine endliche $\bar{\mathfrak{O}}$-Basis $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \cdots, \bar{C}_r$, weil $\bar{\mathfrak{O}}$ ein euklidischer Ring ist. Dabei ist jedes $\bar{C}_i$ $(1 \leqq i \leqq r)$ nach Zusatz 1 zu Hilfssatz 10 durch die Differente von K/k annulliert; also ist die $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge von $\bar{C}_i$ in $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{N}_m)$ endlich. Hieraus schließt man, daß für jede natürliche Zahl m $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{N}_m)$ stets *endliche $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge* besitzt.

Nun wollen wir für ein hinreichend großes m die $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{N}_m)$ bestimmen. Da nach Satz 3 für $(\varphi'_0(\theta_1)) \mid \mathfrak{P}^m$ die $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}_1/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{N}_m)$ gleich ist dem $\mathfrak{P}$-Exponenten der Differente von K_1/k, so wollen wir annehmen, daß für jedes hinreichend große m die $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}_{s-1}/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{N}_m)$ gleich ist dem $\mathfrak{P}$-Exponenten $\bar{d}(K_{s-1}/k)$ der Differente von K_{s-1}/k. Wir ordnen jetzt einem normalen 2-Kozyklus f von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{N}_m$ die Einschränkung $f^{(s-1)}$ von f auf $\mathfrak{O}_{s-1}/\mathfrak{o}$ zu. Dadurch gehen offenbar alle zu f kohomologen, normalen 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{N}_m$ in ein und dieselbe normale 2-Kohomologieklasse von $\mathfrak{O}_{s-1}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{N}_m$ über. Die so definierte Zuordnung stellt also einen $\bar{\mathfrak{O}}$-Homomorphismus Φ von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{N}_m)$ *in* $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}_{s-1}/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{N}_m)$ her. Ist aber $f^{(s-1)}$ ein beliebiger normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}_{s-1}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{N}_m$, so besitzt $f^{(s-1)}$ eine solche

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 5 [1955], Iss. 1, Art. 4

Fortsetzung f auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$, daß f über $\mathfrak{O}_{s-1}$ θ_s-normiert ist[1]. Für ein beliebiges Element $\sum_{i=0}^{n_s-1} x_i^{(s-1)}\theta_s^i$ $(x_i^{(s-1)} \in \mathfrak{O}_{s-1})$ aus $\mathfrak{O}$ und ein beliebiges Element x aus $\mathfrak{o}$ gilt also:

$$\sum_{i=0}^{n_s-1}[xf(x_i^{(s-1)}, \theta_s^i) + f(x, x_i^{(s-1)}\theta_s^i)] \equiv \sum_{i=0}^{n_s-1}[f(xx_i^{(s-1)}, \theta_s^i) + \theta_s^i f(x, x_i^{(s-1)})] \mod \mathfrak{P}^m;$$

weil f über $\mathfrak{O}_{s-1}$ θ_s-normiert und $f(x, x_i^{(s-1)}) = f^{(s-1)}(x, x_i^{(s-1)}) \equiv 0 \mod \mathfrak{P}^m$ ist, so erhält man aus der obigen Kongruenz:

$$f(x, \sum_{i=0}^{n_s-1} x_i^{(s-1)}\theta_s^i) \equiv \sum_{i=0}^{n_s-1} f(x, x_i^{(s-1)}\theta_s^i) \equiv 0 \qquad \mod \mathfrak{P}^m.$$

Daher ist f ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$. Somit ist gezeigt, daß jeder normale 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}_{s-1}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ stets einen normalen 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ als eine Fortsetzung besitzt. Der oben definierte $\mathfrak{O}$-Homomorphismus Φ bildet also $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ *auf* $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}_{s-1}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ ab. Dabei ist der Kern von Φ mit der in $\mathfrak{O}_{s-1}$ zerfallenden Untergruppe $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}_{s-1}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ identisch. Daher gilt folgende $\overline{\mathfrak{O}}$-Isomorphierelation:

$$H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)/H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}_{s-1}; \overline{\mathfrak{R}}_m) \cong H_o^{(2)}(\mathfrak{O}_{s-1}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m). \tag{5. 2}$$

Für jedes hinreichend große m gilt aber nach Satz 1 folgende $\overline{\mathfrak{O}}$-Isomorphierelation:

$$H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}_{s-1}; \overline{\mathfrak{R}}^m) \cong H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_{s-1}; \overline{\mathfrak{R}}_m). \tag{5. 3}$$

Aus (5. 2) und (5. 3) schließt man ohne weiteres:

$$\overline{\mathfrak{O}}\text{-Länge von } H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m) = \overline{\mathfrak{O}}\text{-Länge von } H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_{s-1}; \overline{\mathfrak{R}}_m) + \overline{\mathfrak{O}}\text{-Länge von } H_o^{(2)}(\mathfrak{O}_{s-1}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m).$$

Da $\mathfrak{O}$ über $\mathfrak{O}_{s-1}$ einfach normal ist, so gilt für jedes hinreichend große m:

$$\overline{\mathfrak{O}}\text{-Länge von } H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_{s-1}; \overline{\mathfrak{R}}_m) \doteq \bar{d}(K/K_{s-1}) \ (\mathfrak{P}\text{-Exponent der Differente von } K/K_{s-1});$$

daher ist

$$\overline{\mathfrak{O}}\text{-Länge von } H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m) = \bar{d}(K/K_{s-1}) + \bar{d}(K_{s-1}/k).$$

Wegen des Schachtelungssatzes über Differenten ist dabei $\bar{d}(K/K_{s-1}) + \bar{d}(K_{s-1}/k)$ gleich dem $\mathfrak{P}$-Exponenten der Differente von K/k. Da nach

1) Vgl. M II, Satz 3.

Hilfssatz 1 $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m)$ zu $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m)$ $\mathfrak{O}$-ismorph ist, so schließen wir aus dem bisher Gezeigten folgenden

Satz 4. *Es sei K endlich-separabel über k und $\mathfrak{O}$ die Hauptordnung von K. Ist dann $\mathfrak{O}$ über $\mathfrak{o}$ normal, so besitzt jede (normale) 2-Kohomologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m)$ $(H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m))$ endliche $\mathfrak{O}$-Länge, und sogar endliche $\mathfrak{O}$-Basis, wenn sie kein Nullmodul ist. Ferner existiert eine natürliche Zahl N von der Art, daß für jedes m mit $m \geqq N$ die $\mathfrak{O}$-Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m)$ $(H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m))$ gleich ist dem $\mathfrak{P}$-Exponenten der Differente von K/k.*

§ 6. Struktur der 2-Kohomologiegruppen mit allgemeiner Hauptordnung als Definitionsbereich

Wenn die Hauptordnung $\mathfrak{O}$ einer endlich-separablen Erweiterung K über k *nicht notwendig* normal über $\mathfrak{o}$ ist, dann betrachten wir eine $\bar{K}$ enthaltende, endlich-separable galoissche Erweiterung K^* über k; die Hauptordnung von K^* bezeichnen wir mit $\mathfrak{O}^*$. Da K^* über k bzw. K galoissch ist, so ist $\mathfrak{O}^*$ über $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{O}$ normal[1]. Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}^*$ das nicht-triviale Primideal aus $\mathfrak{O}^*$ und mit $d^*(K^*/k)$ bzw. $d^*(K^*/K)$ den $\mathfrak{P}^*$-Exponenten der Differente von K^*/k bzw. K^*/K. Nach Satz 4 existiert eine natürliche Zahl N derart, daß für jedes m mit $m \geqq N$ $d^*(K^*/k)$ bzw. $d^*(K^*/K)$ gleich ist der $\mathfrak{O}^*$-Länge der normalen 2-Kohomologiegruppe $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m^*)$ bzw. $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}^*/\mathfrak{O}\,;\mathfrak{R}_m^*)$, wo $\mathfrak{R}_m^*$ den Restklassenring von $\mathfrak{O}^*$ nach $\mathfrak{P}^{*m}$ bezeichnet.

Nach dem am Anfang von § 5 Bemerkten beweist man leicht, daß jeder normale 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m^*$ stets als normaler 2-Kozyklus auf $\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}$ fortgesetzt werden kann. Wir ordnen nun einem normalen 2-Kozyklus f^* von $\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m^*$ die Einschränkung f von f^* auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ zu; durch diese Zuordnug entsteht offenbar ein $\mathfrak{O}^*$-Homomorphismus Φ von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m^*)$ auf $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m^*)$. Dabei ist der Kern von Φ die in $\mathfrak{O}$ zerfallende Untergruppe $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}\,;\mathfrak{R}_m^*)$ von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m^*)$. Für eine *beliebige* natürliche Zahl m gilt also folgende $\mathfrak{O}^*$-Isomorphierelation:

$$(6.1)\qquad H_o^{(2)}(\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m^*)/H_o^{(2)}(\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}\,;\mathfrak{R}_m^*) \cong H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m^*).$$

Da nach Satz 4 $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m^*)$ endliche $\mathfrak{O}^*$-Länge besitzt, so ist die $\mathfrak{O}^*$-Länge von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\mathfrak{R}_m^*)$ auch endlich. Somit ist bewiesen:

Hilfssatz 11. *Die $\mathfrak{O}^*$-Länge einer beliebigen (normalen) 2-Koho-*

1) M I, S. 128—129, Hilfssatz 4.

mologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{R}_m^*)$ $(H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{R}_m^*))$ *ist endlich.*

Nun wollen wir annehmen, daß die oben bestimmte nätürlich Zahl N von vornherein so groß gewählt ist, daß $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}\,;\,\mathfrak{R}_m^*)$ nach Satz 1 zu $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}^*/\mathfrak{O}\,;\,\mathfrak{R}_m^*)$ $\mathfrak{O}^*$-isomorph ist; also ist für $m \geqq N$ die $\mathfrak{O}^*$-Länge von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}\,;\,\mathfrak{R}_m^*)$ gleich $d^*(K^*/K)$. Für jedes m mit $m \geqq N$ schließt man also aus (6. 1):

(6. 2) $\quad \mathfrak{O}^*$-Länge von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{R}_m^*) = d^*(K^*/k) - d^*(K^*/K)$.

Wegen des Schachtelungssatzes über Differenten ist $d^*(K^*/k) - d^*(K^*/K)$ offenbar gleich dem $\mathfrak{P}^*$-Exponenten der Differente von K/k.

Im folgenden bezeichnen wir mit $\bar{e}$ die Verzweigungsordnung von K^* über $\bar{K}$, und wir betrachten den Restklassenring $\overline{\mathfrak{R}}_{m_0}$ bzw. $\mathfrak{R}_m^*$ von $\overline{\mathfrak{O}}$ nach $\mathfrak{P}^{m_0}$ bzw. $\mathfrak{O}^*$ nach $\mathfrak{P}^{*m}$, wo $m = m_0 e$ gesetzt ist. Ist dann $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{R}_m^*)$ kein Nullmodul, so ist nach (6. 1) $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{R}_m^*)$ auch kein Nullmodul, also besitzt $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{R}_m^*)$ nach Satz 4 eine $\mathfrak{O}^*$-Basis. Wegen der Relation (6. 1) besitzt $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{R}_m^*)$ auch endliche $\mathfrak{O}^*$-Basis. Nach Satz 2 besitzt dann $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\overline{\mathfrak{R}}_{m_0})$ eine $\overline{\mathfrak{O}}$-Basis $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \cdots, \bar{C}_r$; ferner bilden die $\bar{C}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ auch eine $\mathfrak{O}^*$-Basis von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{R}_m^*)$. Bezeichnet nun $\bar{l}_i$ die $\overline{\mathfrak{O}}$-Länge von $\bar{C}_i$, so ist $\bar{l}_i\bar{e}$ nach der Bemerkung von §3 gleich der $\mathfrak{O}^*$-Länge von $\bar{C}_i$. Also ist $\sum_{i=1}^r \bar{l}_i\bar{e}$ gleich der $\mathfrak{O}^*$-Länge von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\mathfrak{R}_m^*)$.

Wenn insbesondere $m_0 e \geqq N$ ist, so gilt nach (6. 2):

(6. 3) $$\sum_{i=1}^r \bar{l}_i\bar{e} = d^*(K^*/k) - d^*(K^*/K)\,;$$

also ist $(d^*(K^*/k) - d^*(K^*/K))/\bar{e}$ offenbar gleich dem $\mathfrak{P}$-Exponenten $\bar{d}(K/k)$ der Differente von K/k. Daher folgt aus (6. 3):

$$\sum_{i=1}^r \bar{l}_i = \bar{d}(K/k).$$

Da $\sum_{i=1}^r \bar{l}_i$ die $\overline{\mathfrak{O}}$-Länge von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\overline{\mathfrak{R}}_{m_0})$ ist, so ist gezeigt, daß die $\overline{\mathfrak{O}}$-Länge von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\overline{\mathfrak{R}}_{m_0})$ gleich $\bar{d}(K/k)$ ist.

Alles zusammenfassend haben wir bewiesen:

Satz 5. *Es sei $\overline{\mathfrak{R}}_m$ der Restklassenring von $\overline{\mathfrak{O}}$ nach $\mathfrak{P}^m$. Dann besitzt die (normale) 2-Kohomologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\overline{\mathfrak{R}}_m)$ $(H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\overline{\mathfrak{R}}_m))$ endliche $\overline{\mathfrak{O}}$-Basis, wenn sie kein Nullmodul ist. Ferner existiert eine solche natürliche Zahl N, daß für jedes $m \geqq N$ (einschließlich $m = \infty$) die $\overline{\mathfrak{O}}$-Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\overline{\mathfrak{R}}_m)$ $(H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\overline{\mathfrak{R}}_m))$ gleich ist dem $\mathfrak{P}$-Exponenten der Differente $\mathfrak{D}(K/k)$ von K/k; also ist jede normale 2-Kohomologieklasse aus $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\overline{\mathfrak{R}}_m)$ $(H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\overline{\mathfrak{R}}_m))$ durch $\mathfrak{D}(K/k)$ an-*

nulliert.

Nach Satz 5 besitzt $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^\infty)$ offenbar die $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge $\bar{d}(K/k)$. Da nach Verabredung $\bar{\mathfrak{O}} = \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^\infty$ gesetzt ist, so bezeichnen wir im folgenden $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^\infty)$ mit $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}})$. Es sei f ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$. Dann heiße die $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge der f enthaltenden, normalen 2-Kohomologieklasse von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$ die $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge von f in $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}})$. Für jede natürliche Zahl m induziert f offenbar einen normalen 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$, wo $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^m = \mathfrak{R}_m$ gesetzt ist. Ist nun a_m die $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge von f in $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$, so ist nach Satz 5

$$a_m \leqq \bar{d}(K/k).$$

Ferner gilt für $m_1 < m_2$:

$$a_{m_1} \leqq a_{m_2}.$$

Denn für ein Primelement Π von $\mathfrak{P}$ aus $\bar{\mathfrak{O}}$ gilt offenbar

$$\Pi^{a_{m_2}} f \equiv \delta g_{m_2} \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^{m_2},$$

wo g_{m_2} eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_{m_2}$ bezeichnet; weil g_{m_2} offenbar eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_{m_1}$ ist, so gilt

$$\Pi^{a_{m_2}} f \equiv \delta g_{m_2} \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^{m_1},$$

also ist $a_{m_1} \leqq a_{m_2}$. Daher existieren eine natürliche Zahl N und eine nicht-negative ganze rationale Zahl a von der Art, daß für jedes m mit $m \geqq N$ stets $a_m = a$ ist. Offenbar gilt dabei die Ungleichung:

$$\text{(6.4)} \qquad a \leqq \bar{\mathfrak{O}}\text{-Länge von } f \text{ in } H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}}).$$

Ferner existiert eine normale 1-Kokette g_m mit $\Pi^a f \equiv \delta g_m$ mod $\mathfrak{P}^m$, wenn $m \geqq N$ ist. . Für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{O}$ gilt dann:

$$\delta(g_{m+1} - g_m)(X, Y) = \Pi^a f(X, Y) - \Pi^a f(X, Y) \equiv 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^m;$$

d. h. $D_m = g_{m+1} - g_m$ ist eine *Derivation* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$. Nun bezeichnen wir mit $W_1, W_2, \cdots, W_n$ eine Minimalbasis von $\mathfrak{O}$ über $\mathfrak{o}$ und mit $\varphi_i(\Xi)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ das Minimalpolynom von W_i in $\mathfrak{o}$. Wegen $\varphi_i(W_i) = 0$ gilt dann:

$$\varphi'_i(W_i) D_m(W_i) \equiv 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^m,$$

wo $\varphi'_i(\Xi)$ die Ableitung von $\varphi_i(\Xi)$ nach Ξ bezeichnet. Weil offenbar

$\varphi'_i(W_i) \neq 0$ ist, so besitzt $\varphi'_i(W_i)$ den $\mathfrak{P}$-Exponenten $w_i(w_i < \infty)$; daher ist $D_m(W_i) \equiv 0 \mod \mathfrak{P}^{m-w_i}$. Hieraus schließt man ohne Schwierigkeit, daß $\lim\limits_{m\to\infty} D_m(W_i) = 0$ ist. Da ein beliebiges Element X aus $\mathfrak{O}$ von der Form

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i W_i \qquad (x_i \in \mathfrak{o})$$

ist, so gilt:

$$D_m(X) - \sum_{i=1}^{n} x_i D_m(W_i) \equiv 0 \qquad \mod \mathfrak{P}^m;$$

hieraus schließt man:

$$\lim_{m\to\infty} D_m(X) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i D_m(W_i) = 0.$$

Dies besagt aber, daß die Folge $\{D_m(X), m = N, N+1, \cdots\}$ gleichmäßig zur Null konvergiert; d. h. zu einer beliebigen natürlichen Zahl ν existiert eine solche natürliche Zahl $N(\nu) \geqq \nu$, daß für ein beliebiges Element X aus $\mathfrak{O}$ und für jedes m mit $m \geqq N(\nu)$ stets

$$D_m(X) \equiv 0 \qquad \mod \mathfrak{P}^\nu$$

gilt.

Betrachtet man also $g_m(X)$ als eine Funktion von X, so konvergiert die Funktionenfolge $\{g_m(X); m = N, N+1, \cdots\}$ gleichmßig zu einem Element $g(X)$ aus $\overline{\mathfrak{O}}$. Nach Definition gilt für ein beliebiges Element x aus $\mathfrak{o}$:

$$\lim_{m\to\infty} g_m(xX) = g(xX);$$

weil aber $g_m(xX) \equiv x g_m(X) \mod \mathfrak{P}^m$ ist, so ist

$$\lim_{m\to\infty} g_m(xX) = \lim_{m\to\infty} x g_m(X) = x g(X),$$

also ist:

$$g(xX) = x g(X).$$

Ferner gelten für ein beliebiges Element Y aus $\mathfrak{O}$:

$$\lim_{m\to\infty} g_m(X) = g(X), \lim_{m\to\infty} g_m(Y) = g(Y) \text{ und } \lim_{m\to\infty} g_m(X+Y) = g(X+Y);$$

da $g_m(X+Y) \equiv g_m(X) + g_m(Y) \mod \mathfrak{P}^m$ ist, so schließt man ohne Schwierigkeit:

$$g(X+Y)=g(X)+g(Y).$$

Somit ist gezeigt, daß g eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{O}$ ist. Wegen der Kongruenz $\Pi^a f(X, Y) \equiv \delta g_m(X, Y) \equiv Y g_m(X) + X g_m(Y) - g_m(XY) \bmod \mathfrak{P}^m$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Pi^a f(X, Y) &= \lim_{m\to\infty}(Y g_m(X) + X g_m(Y) - g_m(XY)) \\ &= Y g(X) + X g(Y) - g(XY) = \delta g(X, Y);\end{aligned}$$

die $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge von f in $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}})$ ist also nicht größer als a. Hieraus schließt man nach (6. 4):

$$a = \bar{\mathfrak{O}}\text{-Länge von } f \text{ in } H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}}).$$

Mithin ist bewiesen:

Hilfssatz 12. *Es sei f ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$ mit der $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge a in $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}})$. Dann existiert eine natürliche Zahl N, so daß für jedes m mit $m \geqq N$ die $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge von f in $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ gleich a ist. Insbesondere ist dann und nur dann $f \sim 0$ $(\mathfrak{P}^\infty)$, wenn für jedes hinreichend große m stets $f \sim 0$ $(\mathfrak{P}^m)$ ist.*

Nun seien $f_1, f_2, \cdots, f_r$ $\bar{\mathfrak{O}}$-unabhängige, normale 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$; d. h. aus $\bar{A}_1 f_1 + \bar{A}_2 f_2 + \cdots \bar{A}_r f_r \sim 0$ $(\mathfrak{P}^\infty)$ mit den Koeffizienten $\bar{A}_i$ $(i=1, 2, \cdots, r)$ aus $\bar{\mathfrak{O}}$ folgen $\bar{A}_1 f_1 \sim \bar{A}_2 f_2 \sim \cdots \sim \bar{A}_r f_r \sim 0$ $(\mathfrak{P}^\infty)$. Ferner seien $a_1, a_2, \cdots, a_r$ bzw. die $\bar{\mathfrak{O}}$-Längen von $f_1, f_2, \cdots, f_r$ in $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}})$[1]. Dann existiert eine natürliche Zahl N derart, daß für jedes m mit $m \geqq N$ $f_1, f_2, \cdots, f_r$ als normale 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_m$ auch $\bar{\mathfrak{O}}$-unabhängig sind. Da nämlich die Behauptung nach Hilfssatz 12 für $r=1$ richtig ist, so wollen wir annehmen, daß die Behauptung für $f_1, f_2, \cdots, f_{r-1}$ richtig ist. Existiert aber zu $f_1, f_2, \cdots, f_r$ keine solche Zahl N, so gibt es eine aufsteigende unendliche Folge der natürlichen Zahlen $m_1 < m_2 < \cdots < m_j < \cdots$ derart, daß für jedes m_ν $(1 \leqq \nu < \infty)$ $f_1, f_2, \cdots, f_r$ als 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_{m_\nu}$ nicht $\bar{\mathfrak{O}}$-unabhängig sind. Dabei kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß nach Hilfssatz 12 die $\bar{\mathfrak{O}}$-Längen von den f_i $(i=1, \cdots, r)$ in den $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_{m_\nu})$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ bzw. gleich a_i sind, und daß $f_1, f_2, \cdots, f_{r-1}$ als 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_{m_\nu}$ $\bar{\mathfrak{O}}$-unabhängig sind. Nach Voraussetzung gilt also zu jedem m_ν folgende Kohomologierelation:

1) Weil $f_1, f_2, \cdots, f_r$ $\bar{\mathfrak{O}}$-unabhängig sind, so sind die $a_i (i=1, 2, \cdots r)$ alle größer als 0.

$$\bar{A}_{\nu,1}f_1 + \bar{A}_{\nu,2}f_2 + \cdots + \bar{A}_{\nu,r}f_r \sim 0 \qquad (\mathfrak{P}^{m_\nu}), \tag{6. 5}$$

wo mindestens ein $\bar{A}_{\nu,i}f_i$ mod $\mathfrak{P}^{m_\nu}$ zur Null nicht kohomolog ist. Ist dabei $\bar{A}_{\nu,r}f_r \sim 0$ $(\mathfrak{P}^{m_\nu})$, so müssen wegen $\bar{A}_{\nu,1}f_1 + \cdots + \bar{A}_{\nu,r-1}f_{r-1} \sim 0$ $(\mathfrak{P}^{m_\nu})$ und folglich nach Voraussetzung

$$\bar{A}_{\nu,1}f_1 \sim \bar{A}_{\nu,2}f_2 \sim \cdots \sim \bar{A}_{\nu,r-1}f_{r-1} \sim 0 \qquad (\mathfrak{P}^{m_\nu})$$

sein, was aber ein Widerspruch ist. Es ist also für jedes m_ν

$$\bar{A}_{\nu,r}f_r \nsim 0 \qquad (\mathfrak{P}^{m_\nu}) .$$

Bezeichnet man nun mit b_ν den $\mathfrak{P}$-Exponenten von $\bar{A}_{\nu,r}$ und mit Π ein Primelement von $\mathfrak{P}$, so ist $\Pi^{b_\nu}\bar{A}_{\nu,r}^{-1}$ eine Einheit aus $\bar{\mathfrak{O}}$. Durch Multiplikation mit $\Pi^{b_\nu}\bar{A}_{\nu,r}^{-1}$ erhält man aus (6. 5):

$$\bar{B}_{\nu,1}f_1 + \bar{B}_{\nu,2}f_2 + \cdots + \bar{B}_{\nu,r-1}f_{r-1} + \Pi^{b_\nu}f_r \sim 0 \qquad (\mathfrak{P}^{m_\nu}), \tag{6. 6}$$

wo $\bar{B}_{\nu,i} = \bar{A}_{\nu,i}\bar{A}_{\nu,r}^{-1}\Pi^{b_\nu} (i = 1, 2, \cdots, r-1)$ gesetzt sind. Offenbar ist dabei $0 < b_\nu < a_r$. Es existiert also eine unendliche Teilfolge von $\{b_\nu;\ \nu = 1, 2, \cdots\}$, deren Glieder alle gleich sind. Daher kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß von vornherein

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_\nu = \cdots = b$$

sind. Da aus (6. 6) stets

$$\bar{B}_{\nu,1}f_1 + \bar{B}_{\nu,2}f_2 + \cdots + \bar{B}_{\nu,r-1}f_{r-1} + \Pi^b f_r \sim 0 \qquad (\mathfrak{P}^{m_\nu - 1})$$

folgt, so kann man annehmen, daß für jedes m mit $m \geqq m_1$ stets

$$\bar{B}_{m,1}f_1 + \bar{B}_{m,2}f_2 + \cdots + \bar{B}_{m,r-1}f_{r-1} + \Pi^b f_r \sim 0 \qquad (\mathfrak{P}^{m}) \tag{6. 7}$$

gilt, wo die $\bar{B}_{m,i}$ $(i = 1, 2, \cdots, r-1)$ Elemente aus $\bar{\mathfrak{O}}$ bezeichnen. Dann schließt man aus (6. 7):

$$(\bar{B}_{m+1,1} - \bar{B}_{m,1})f_1 + \cdots + (\bar{B}_{m+1,r-1} - \bar{B}_{m,r-1})f_{r-1} \sim 0 \qquad (\mathfrak{P}^{m}).$$

Weil nach Voraussetzung $f_1, f_2, \cdots, f_{r-1}$ als 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{K}_m$ $\bar{\mathfrak{O}}$-unabhängig sind, so müssen

$$(\bar{B}_{m+1,1} - \bar{B}_{m,1})f_1 \sim \cdots \sim (\bar{B}_{m+1,r-1} - \bar{B}_{m,r-1})f_{r-1} \sim 0 \qquad (\mathfrak{P}^{m})$$

sein; hieraus folgt für jedes i mit $1 \leqq i \leqq r-1$:

$$\bar{B}_{m+1,i} \equiv \bar{B}_{m,i} \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^{a_i}.$$

Da aber m beliebig sein kann, soweit $m \geqq m_1$ ist, so erhält man:

$$\bar{B}_{m_1,i} \equiv \bar{B}_{m_1+1,i} \equiv \cdots \equiv \bar{B}_{m,i} \equiv \cdots \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^{a_i}.$$

Setzt man dabei $\bar{B}_{m_1,i} = \bar{B}_i$, so ist

$$\bar{B}_{m,i} - \bar{B}_i \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^{a_i};$$

also gilt $(\bar{B}_{m,i} - \bar{B}_i)f_i \sim 0$ $(\mathfrak{P}^\infty)$ und infolgedessen ist

$$\bar{B}_{m,i} f_i = \bar{B}_i f_i + (\bar{B}_{m,i} - \bar{B}_i) f_i \sim \bar{B}_i f_i \qquad (\mathfrak{P}^\infty).$$

Man erhält also aus (6.7);

$$\bar{B}_1 f_1 + \bar{B}_2 f_2 + \cdots + \bar{B}_{r-1} f_{r-1} + \Pi^b f_r \sim 0 \qquad (\mathfrak{P}^m), \tag{6.8}$$

woraus nach Hilfssatz 12

$$\bar{B}_1 f_1 + \bar{B}_2 f_2 + \cdots + \bar{B}_{r-1} f_{r-1} + \Pi^b f_r \sim 0 \qquad (\mathfrak{P}^\infty)$$

folgt, was aber ein Widerspruch ist. Somit ist bewiesen:

Hilfssatz 13. *Es seien $f_1, f_2, \cdots, f_r$ $\mathfrak{O}$-unabhängige, normale 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{O}$ und $a_1, a_2, \cdots, a_r$ bzw. die $\mathfrak{O}$-Längen von $f_1, f_2, \cdots, f_r$ in $H_0^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{O})$. Dann existiert eine natürliche Zahl N von der Art, daß für jedes m mit $m \geqq N$ $f_1, f_2, \cdots, f_r$ in $H_0^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$ bzw. die $\mathfrak{O}$-Längen $a_1, a_2, \cdots, a_r$ besitzen und sogar als 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ $\mathfrak{O}$-unabhängig sind.*

Nun kann man folgenden Satz beweisen:

Satz 6. *Es existiert eine natürliche Zahl N derart, daß für jedes m mit $m \geqq N$ die (normale) 2-Kohomologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$ $(H_0^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m))$ zu $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{O})$ $(H_0^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{O}))$ $\mathfrak{O}$-isomorph ist.*

Beweis. Nach Hilfssatz 1 braucht man den Satz nur für die normalen 2-Kohomologiegruppen zu beweisen. Nach Satz 5 existiert eine natürliche Zahl N_1 von der Art, daß für jedes m mit $m \geqq N_1$ die $\mathfrak{O}$-Länge von $H_0^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$ gleich $\bar{d}(K/k)$ ist, wo $\bar{d}(K/k)$ den $\mathfrak{P}$-Exponenten der Differente von K/k bezeichnet. Wenn also $H_0^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{O})$ der Nullmodul ist, so ist $\bar{d}(K/k) = 0$ und infolgedessen ist $H_0^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$ auch Nullmodul. Ist aber $H_0^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{O})$ kein Nullmodul, so besitzt $H_0^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{O})$ nach Satz 5 eine endlich $\mathfrak{O}$-Basis $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \cdots, \bar{C}_r$. Wir bezeichnen mit den $\bar{l}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ bzw. die $\mathfrak{O}$-Längen von den $\bar{C}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ und mit den f_i $(i = 1, 2, \cdots, r)$ bzw. die Vertreterkozyklen aus den $\bar{C}_i$. Nach Hilfssatz 13 existiert dann eine natürliche Zahl N_2 von der Art, daß für jedes m

mit $m \geqq N_2$ $f_1, f_2, \cdots, f_r$ als 2-Kozyklen aus $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$ $\mathfrak{O}$-unabhängig sind und bzw. die $\mathfrak{O}$-Längen $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \cdots, \bar{l}_r$ besitzen. Für jedes m mit $m \geqq$ Max (N_1, N_2) bezeichnen wir mit $\bar{C}_m(f_i)$ $(1 \leqq i \leqq r)$ die f_i enthaltende 2-Kohomologieklasse aus $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$; offenbar ist die $\mathfrak{O}$-Länge von $\bar{C}_m(f_i)$ in $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$ gleich $\bar{l}_i$. Ferner sind $\bar{C}_m(f_1), \bar{C}_m(f_2), \cdots, \bar{C}_m(f_r)$ in $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$ $\mathfrak{O}$-unabhängig. Daher besitzt der durch die $\bar{C}_m(f_i)$ $(i=1, 2, \cdots, r)$ erzeugte $\mathfrak{O}$-Untermodul von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$ die $\mathfrak{O}$-Länge $\sum_{i=1}^{r} \bar{l}_i = \bar{d}(K/k)$ ($=\mathfrak{O}$-Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$); d. h. die $\bar{C}_m(f_i)$ $(i=1, 2, \cdots, r)$ bilden eine $\mathfrak{O}$-Basis von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$.

Eine beliebige 2-Kohomologieklasse $\bar{C}$ aus $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{O})$ ist von Form $\bar{C} = \sum_{i=1}^{r} \bar{A}_i \bar{C}_i$ mit den Koeffizienten $\bar{A}_i$ $(i=1, 2, \cdots, r)$ aus $\mathfrak{O}$. Ordnet man nun $\bar{C}$ die 2-Kohomologieklasse $\bar{C}_m = \sum_{i=1}^{r} \bar{A}_i \bar{C}_m(f_i)$ zu, so ergibt sich durch diese Zuordung ein $\mathfrak{O}$-Homomorphismus ψ_m von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{O})$ auf $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$, weil die $\bar{C}_m(f_i)$ $(i=1, 2, \cdots, r)$ eine $\mathfrak{O}$-Basis von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$ bilden. Da die $\mathfrak{O}$-Längen von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{O})$ und $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$ einander gleich sind, so muß ψ_m sicher ein Isomorphismus sein, w. z. b. w.

Es sei $K^{(1)}$ ein Zwischenkörper zwischen k und K und $\mathfrak{O}^{(1)}$ die Hauptordnung von $K^{(1)}$. Ordnet man dann einem beliebigen 2-Kozyklus f von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ die Einschränkung $f^{(1)}$ von f auf $\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{o}$ zu, so induziert diese Zuordnung einen $\mathfrak{O}$-Homomorphismus Φ von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$ in $H^{(2)}(\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$. Dabei bezeichnet $\mathfrak{R}_m$ wieder den Restklassenring von $\mathfrak{O}$ nach $\mathfrak{P}^m$. Nach Satz 5 existiert eine natürliche Zahl N derart, daß für jedes m mit $m \geqq N$ die $\mathfrak{O}$-Längen von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$, $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{O}^{(1)}; \mathfrak{R}_m)$ und $H^{(2)}(\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$ bzw. $\bar{d}(K/k)$, $\bar{d}(K/K^{(1)})$ und $\bar{d}(K^{(1)}/k)$ sind, wo $\bar{d}(K/k)$, $\bar{d}(K/K^{(1)})$ und $\bar{d}(K^{(1)}/k)$ bzw. die $\mathfrak{P}$-Exponenten der Differenten von K/k, $K/K^{(1)}$ und $K^{(1)}/k$ bezeichnen. Ferner kann man nach Satz 1 ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß für jedes m $(\geqq N)$ die in $\mathfrak{O}^{(1)}$ zerfallende Untergruppe $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}^{(1)}; \mathfrak{R}_m)$ zu $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{O}^{(1)}; \mathfrak{R}_m)$ $\mathfrak{O}$-isomorph ist. Da offenbar $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}^{(1)}; \mathfrak{R}_m)$ den Kern des $\mathfrak{O}$-Homomorphismus Φ bildet, so schließt man ohne Schwierigkeit:

$$\begin{aligned}\bar{d}(K/k) &\leqq \bar{d}(K^{(1)}/k) + \mathfrak{O}\text{-Länge von } H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}^{(1)}; \mathfrak{R}_m) \\ &\leqq \bar{d}(K^{(1)}/k) + \bar{d}(K/K^{(1)}).\end{aligned}$$

Wegen des Schachtelungssatzes über Differenten muß dabei Gleichheit $\bar{d}(K/k) = \bar{d}(K^{(1)}/k) + \bar{d}(K/K^{(1)})$ bestehen; d. h. durch Φ ergibt sich folgende $\mathfrak{O}$-Isomorphierelation:

(6. 9) $$H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)/H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}^{(1)}: \mathfrak{R}_m) \cong H^{(2)}(\mathfrak{O}^{(2)}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m).$$

Satz 7. *Es sei $\mathfrak{O}^{(1)}$ die Hauptordnung eines beliebigen Zwischen-*

körpers $K^{(1)}$ zwischen k und K. Dann existiert eine natürliche Zahl N von der Art, daß für jedes m mit $m \geqq N$ stets die $\mathfrak{O}$-Isomorphierelation

$$H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\overline{\mathfrak{R}}_m)/H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o},\,\mathfrak{O}^{(1)}\,;\,\overline{\mathfrak{R}}_m) \cong H^{(2)}(\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{o}\,;\,\overline{\mathfrak{R}}_m)$$

gilt, wo $\overline{\mathfrak{R}}_m$ den Restklassenring von $\overline{\mathfrak{O}}$ nach $\overline{\mathfrak{P}}_m$ und $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o},\,\mathfrak{O}^{(1)}\,;\,\overline{\mathfrak{R}}_m)$ die in $\mathfrak{O}^{(1)}$ zerfallende Untergruppe von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\overline{\mathfrak{R}}_m)$ bezeichnet.

Nun sei $f^{(1)}$ ein 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$. Dann besagt die Relation (6. 9), daß es einen 2-Kozyklus f von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ gibt, dessen Einschränkung auf $\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{o}$ mod $\overline{\mathfrak{P}}_m$ zu $f^{(1)}$ kohomolog ist; d. h. als 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ gilt:

$$f \sim f^{(1)} \qquad (\overline{\mathfrak{P}}^m).$$

Es existiert also eine 1-Kokette $g^{(1)}$ von $\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$, für die in $H^{(2)}(\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{o}\,;\,\overline{\mathfrak{R}}_m)$

$$f \equiv f^{(1)} + \delta g^{(1)} \qquad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}_m$$

gilt. Wie schon am Anfang von §2 gezeigt ist, besitzt $g^{(1)}$ eine Fortsetzung g auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$. Der 2-Kozyklus $f - \delta g$ ist also eine Fortsetzung von $f^{(1)}$ auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$. Somit ist bewiesen:

Zusatz 1 zn Satz 7. *Es existiert eine natürliche Zahl N derart, daß für jedes m mit $m \geqq N$ ein beliebiger 2-Kozyklus $f^{(1)}$ von $\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ stets auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ fortsetzbar ist.*

Stimmt nun $K^{(1)}$ mit seinem *Trägheitskörper* über k überein, so ist $\mathfrak{O}^{(1)}$ einfach normal über $\mathfrak{o}$, und der $\overline{\mathfrak{P}}$-Exponent der Differente von $K^{(1)}/k$ ist gleich 0[1]. Also ist $H^{(2)}(\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{o}\,;\,\overline{\mathfrak{R}}_m)$ nach Satz 3 stets Nullmodul. Weil aber für jedes m $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\overline{\mathfrak{R}}_m)/H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o},\,\mathfrak{O}^{(1)}\,;\,\overline{\mathfrak{R}}_m)$ $\overline{\mathfrak{O}}$-isomorph in $H^{(2)}(\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{o}\,;\,\overline{\mathfrak{R}}_m)$ abgebildet ist, so muß $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\overline{\mathfrak{R}}_m) = H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o},\,\mathfrak{O}^{(1)}\,;\,\overline{\mathfrak{R}}_m)$ sein; d. h. jeder 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ zerfällt stets in $\mathfrak{O}^{(1)}$.

Zusatz 2 zu Satz 7. *Es sei $K^{(1)}$ ein Zwischenkörper zwischen k und K, und $\mathfrak{O}^{(1)}$ sei die Hauptordnung von $K^{(1)}$. Ist dann $K^{(1)}$ mit seinem Trägheitskörper über k identisch, so zerfällt jeder 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ stets in $\mathfrak{O}^{(1)}$.*

1) Vgl. etwa E. Artin, a. a. O., S. 91—92.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
OKAYAMA UNIVERSITY

(*Received June 28, 1955*)